

分类号 \_\_\_\_\_

密级 \_\_\_\_\_

UDC \_\_\_\_\_

编号 \_\_\_\_\_

# 中国科学院研究生院 博士学位论文

几类离散时间控制系统中反馈机制对付不确定性的能力  
与局限

马宏宾

指导教师 郭 雷 院 士

中国科学院数学与系统科学研究院

申请学位级别 博士 学科专业名称 运筹学与控制论

论文提交日期 2006年5月 论文答辩日期 2006年5月

培养单位 中国科学院数学与系统科学研究院

学位授予单位 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 \_\_\_\_\_

Typeset by L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2 $\epsilon$  at July 16, 2006

With package C<sub>A</sub>St<sub>H</sub>esis v0.1g of C<sub>T</sub>E<sub>X</sub>.ORG

# Capability and Limitation of Feedback Mechanism in Dealing with Uncertainties of Some Discrete-time Control Systems

**Hongbin Ma**

Supervisor:

Prof. **Lei Guo**

Key Laboratory of Systems and Control  
Institute of Systems Science  
Academy of Mathematics and Systems Science  
Chinese Academy of Sciences

July, 2006

*Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.  
in Operations Research and Control Theory*



## 摘 要

本文研究的主题为几类离散时间控制系统反馈机制的能力与极限,同时也研究了其它一些相关问题。反馈是自动控制领域最重要和最基本的概念,其主要作用是减少各种不确定性对控制系统性能的影响。本文的工作继续了近年来由论文[42]开始的反馈机制能力与极限的一系列研究,主要内容及贡献可总结如下:

1. 对一类结构不确定性(非参数不确定性)可由多个Lipschitz常数刻画的 $p$ 阶非线性自回归控制系统,证明了:若这些Lipschitz常数满足一些特定的代数条件,则使系统全局镇定的控制器不存在。这一不可能性结果推广了[121]的结果。
2. 对一类具有未知参数和高斯白噪声的高阶非线性离散时间控制系统,证明了:若系统的各个非线性增长指数满足一个与一阶系统有关的简单代数条件,则使系统全局镇定的控制器不存在。这一不可能性结果继续了以前关于类似的一阶系统的一些研究,它表明系统的一阶主部在某种意义上决定了系统反馈机制能力的一个极限。
3. 在反馈机制能力极限的研究中,以前结果中考虑的不确定函数集 $\mathcal{F}$ 都包含有无限多个函数。为研究不确定集 $\mathcal{F}$ 本质上可由有限多个函数覆盖时反馈机制的能力极限,本文提出了新的有限模型自适应控制问题,其特点是考虑的系统的结构不确定性本质上可由一个已知的有限函数集(即模型集)来代表。对该类问题,基于不同的思想,提出了几种不同的途径来设计自适应控制律,并针对这些算法分别在较弱的条件下证明了闭环系统的稳定性。这些结果合在一起对内部不确定性本质上有限的系统的反馈机制能力给出了肯定的部分回答:
  - ✓ 对无噪声情形,在有限步内就能够辨识出真实系统。
  - ✓ 对有界噪声情形,存在一个反馈控制器,使得闭环系统的输出有界。
  - ✓ 对无界噪声情形,如果噪声在 $p$ -平均意义下有界,同时真实系统及已知模型对应的非线性函数满足线性增长条件,则存在一个反馈控制

器,使得闭环系统的输出在 $p$ -平均意义下有界。

4. 对具有通讯限制和多种不确定性(环境噪声、未知相互作用强度、未知内部参数)的复杂系统,为研究反馈控制的能力问题,提出了一个一般的复杂系统自适应控制问题的数学框架,可为进一步深刻研究局部自适应控制目标和系统全局目标的关系提供基础。在这个框架下,针对一个简单但非平凡的随机离散时间多主体网络动力学模型,提出并研究了自适应同步问题。在这一问题中,针对随机系统提出了一些新的同步概念,证明了对于四种不同的局部跟踪目标,在关于噪声和通讯限制的较弱条件下,系统中的各个主体基于局部跟踪目标和最小二乘估计算法来设计局部控制器时,在平均的意义下,它们能自组织地实现所有主体的同步这一全局目标。

**关键词:** 离散时间控制系统, 不确定性, 稳定性, 鲁棒性, 反馈机制能力与极限, 自适应控制, 有限模型自适应控制, 复杂系统, 自适应同步

## Abstract

In this thesis, we investigate some problems on capability and limitation of feedback mechanism in dealing with uncertainties of some discrete-time control systems. Some related problems are also formulated and studied.

Feedback is the most important concept in automatic control, and its primary objective is to reduce the effects of the uncertainty on the performance of control system. The work in this thesis extends some quantitative results in the direction of feedback capability and limitation initiated in [42] and [116] in the last decade. The main contents and contributions of the work can be summarized as follows:

1. For a class of  $p$ -th order nonlinear autoregressive control systems with structural uncertainty characterized by multiple Lipschitz constants of the uncertain nonlinear function  $f$ , it is shown that under some algebraic conditions on these Lipschitz constants, there exists no globally stabilizing feedback control law for the corresponding uncertain systems. This impossibility result is an extension of the previous result obtained by Zhang and Guo (2002).
2. For a high-order discrete-time nonlinear system with unknown parameters and Gaussian noise, it is shown that under a simple algebraic condition on some constants relating to the nonlinearity of the system, no feedback controller can globally stabilize the uncertain system. This impossibility result gives a try to understand the capability and limitation of feedback mechanism of high-order discrete-time nonlinear system and continues a series of previous research on similar first-order systems. It shows that for the high-order discrete-time nonlinear system studied here, a polynomial corresponding to the first-order principle part of the system determines the limit of the feedback mechanism.
3. Finite-model adaptive control problem is also initiated and formulated in

the exploration of capability and limitation of feedback control. This type of problems are characterized by the feature that the structural uncertainty of system can be abstracted by a set of essentially finite number of nonlinear functions. To study this type of problems, several algorithms based on different approaches are proposed and studied, and the stability of closed-loop system is proved under very weak conditions. These results give some partial answers for finite-model adaptive control problem:

- ✓ For noise-free systems, the uncertainty can be identified correctly in finite time steps.
  - ✓ For systems with sample path bounded noise, there exists a feedback controller such that the output sequence  $\{y_t\}$  of the closed-loop system is bounded.
  - ✓ For systems with noise bounded in the sense of  $p$ -th mean and with nonlinear models having linear growth rate, it is shown that there exists a feedback controller such that the output sequence  $\{y_t\}$  of the closed-loop system is bounded in sense of  $p$ -th mean.
4. To explore the capability of adaptive control in complex systems with communication limits and uncertainties (including noise disturbance in the environment, parametric uncertainties of interactions among agents, and unknown internal parameters), we propose a general framework of adaptive control of complex systems. In this framework, a simple but non-trivial stochastic discrete-time model of network dynamics is formulated and its synchronization problem is investigated. As a starting point in this direction, some novel definitions of synchronization for stochastic systems are given and applied in our model, and we prove that in four different cases on local goals, including “deterministic tracking”, “center-oriented tracking”, “loose tracking” and “tight tracking”, under some weak conditions on noise sequence and communication limits, agents in our model can achieve global synchronization (in some sense of mean) by using local estimators and controllers based on Least-squares (LS) algorithm. The conditions



given are also necessary even when there are no parametric uncertainties of interactions. This result shows that agents in a noisy complex system with communication limits can achieve the global goal of synchronization by using proper local learning algorithm and local adaptive controllers, while they are pursuing for their local goals.

**Keywords:** Discrete-time control systems, Uncertainties, Stability, Robustness, Capability and limitations of feedback mechanism, Adaptive control, Finite-model adaptive control, Complex systems, Adaptive Synchronization

# 目 录

摘要	i
Abstract	iii
目录	vi
<b>第一部分 预备介绍</b>	<b>1</b>
<b>第一章 绪论</b>	<b>2</b>
1.1 控制论•反馈•不确定性 . . . . .	2
1.2 反馈机制的能力与极限 . . . . .	5
1.3 本文内容与结构安排 . . . . .	6
<b>第二章 迭代动力系统</b>	<b>8</b>
2.1 动力系统的基本概念 . . . . .	8
2.2 差分方程 . . . . .	9
2.3 差分不等式 . . . . .	10
2.4 含参迭代动力系统 . . . . .	11
2.5 与反馈机制能力极限研究的联系 . . . . .	12
2.6 本章小结 . . . . .	12
<b>第二部分 几类系统的反馈机制能力极限研究</b>	<b>13</b>
<b>第三章 结构未知情形—多Lipschitz常数刻画的不确定系统</b>	<b>14</b>
3.1 已有结果 . . . . .	14
3.2 问题描述 . . . . .	15
3.3 反面结果 . . . . .	15
3.3.1 反面—主要结果 . . . . .	15

3.3.2	反面—定理证明 . . . . .	25
3.3.3	反面—进一步讨论 . . . . .	43
3.4	正面结果 . . . . .	51
3.4.1	正面—主要结果 . . . . .	51
3.4.2	正面—定理证明 . . . . .	52
3.4.3	正面—进一步讨论 . . . . .	54
3.5	本章小结 . . . . .	57
<b>第四章</b>	<b>参数未知情形—高阶非线性高斯噪声模型</b>	<b>59</b>
4.1	已有结果 . . . . .	59
4.2	问题描述 . . . . .	60
4.3	反面结果 . . . . .	61
4.3.1	反面—主要结果 . . . . .	61
4.3.2	反面—定理证明 . . . . .	62
4.3.3	反面—进一步讨论 . . . . .	74
4.4	本章小结 . . . . .	75
<b>第五章</b>	<b>半参数情形—一个一阶非线性模型</b>	<b>76</b>
5.1	已有结果 . . . . .	76
5.2	问题描述 . . . . .	76
5.3	一个统一的自适应控制器 . . . . .	77
5.4	参数部分线性增长情形( $b = 1$ ) . . . . .	78
5.4.1	主要结果 . . . . .	79
5.4.2	定理证明 . . . . .	80
5.5	本章小节 . . . . .	84
<b>第三部分</b>	<b>有限模型自适应控制问题</b>	<b>85</b>
<b>第六章</b>	<b>有限模型自适应控制问题</b>	<b>86</b>
6.1	背景介绍 . . . . .	86
6.2	问题描述 . . . . .	87
6.3	几种控制器设计方案 . . . . .	88

6.4	与切换系统的联系 . . . . .	89
6.5	已有相关结果 . . . . .	91
6.6	本部分预备概念 . . . . .	93
6.7	本章小结 . . . . .	94
<b>第七章</b>	<b>拟LS型算法及分析</b>	<b>96</b>
7.1	拟LS型算法 . . . . .	96
7.2	主要结果 . . . . .	97
7.3	主要结果在参数情形的应用 . . . . .	98
7.3.1	“恰当开覆盖” . . . . .	99
7.3.2	参数非线性情形的应用 . . . . .	100
7.3.3	与已有结果的比较 . . . . .	102
7.4	两个反例 . . . . .	102
7.4.1	反例1 . . . . .	102
7.4.2	反例2 . . . . .	109
7.5	定理的证明 . . . . .	111
7.5.1	一些引理 . . . . .	111
7.5.2	定理7.1的证明 . . . . .	112
7.6	数值仿真 . . . . .	118
7.7	本章小结 . . . . .	121
<b>第八章</b>	<b>拟WLS型算法及分析</b>	<b>122</b>
8.1	拟WLS型算法 . . . . .	122
8.2	主要结果 . . . . .	123
8.3	两个反例 . . . . .	123
8.3.1	反例1 . . . . .	124
8.3.2	反例2 . . . . .	125
8.4	定理的证明 . . . . .	127
8.4.1	假设A1下的证明: . . . . .	127
8.4.2	假设A2下的证明: . . . . .	129
8.4.3	关于证明的一些说明 . . . . .	133
8.5	数值仿真 . . . . .	134

---

8.6	本章小结	136
<b>第九章</b>	<b>其它几种算法及分析</b>	<b>137</b>
9.1	几种算法的说明	137
9.1.1	基于“否定不可行控制器”的方法	137
9.1.2	基于权重向量自动调整的方法	140
9.1.3	基于伪参数向量估计的方法	141
9.2	主要结果	142
9.2.1	对本部分中心问题的回答	143
9.2.2	算法9.1.1的BIBO稳定性	144
9.2.3	算法9.1.2的BIBO稳定性	144
9.2.4	算法9.1.3的随机均方稳定性	145
9.3	定理的证明	146
9.3.1	命题9.1的证明	146
9.3.2	定理9.4的证明	148
9.3.3	定理9.6的证明	149
9.3.4	定理9.8的证明	153
9.4	数值仿真	156
9.5	本章小结	156
<b>第四部分</b>	<b>不确定复杂系统自适应控制与同步问题</b>	<b>159</b>
<b>第十章</b>	<b>一个复杂系统自适应控制问题的框架</b>	<b>160</b>
10.1	背景介绍	160
10.2	一个较一般的框架	161
10.3	以上框架下可研究的问题	163
10.4	本章小结	163
<b>第十一章</b>	<b>一个离散时间多主体动力学模型自适应同步问题</b>	<b>164</b>
11.1	背景介绍	164
11.2	问题描述	165
11.3	局部LS估计算法及控制律设计	168

11.4 主要结果 . . . . .	169
11.5 定理证明 . . . . .	171
11.5.1 一些引理 . . . . .	171
11.5.2 定理的证明 . . . . .	182
11.6 仿真例子 . . . . .	186
11.7 本章小结 . . . . .	189
<b>第十二章 一个离散时间多主体动力学模型自适应控制问题</b>	<b>190</b>
12.1 背景介绍 . . . . .	190
12.2 问题描述 . . . . .	191
12.2.1 模型 . . . . .	191
12.2.2 问题 . . . . .	192
12.3 局部LS估计算法及控制律设计 . . . . .	192
12.4 主要结果 . . . . .	194
12.5 定理证明 . . . . .	194
12.6 本章小结 . . . . .	199
<b>结束语：总结与展望</b>	<b>200</b>
<b>参考文献</b>	<b>202</b>
<b>读博士期间发表和完成文章目录</b>	<b>214</b>
<b>致谢</b>	<b>216</b>

## 插 图

3.1	$p = 2$ :基于条件(★)的计算结果 . . . . .	46
3.2	$p = 2$ :基于条件(★)的计算过程 . . . . .	47
3.3	$p = 2$ :基于条件B的计算结果 . . . . .	48
3.4	$p = 2$ :基于条件C的计算结果 . . . . .	49
3.5	$p = 2$ :对称情形与非对称情形对比 . . . . .	50
7.1	反例1.序列 $\{s_k(t)\}$ 和 $\{y_t\}$ . . . . .	109
7.2	反例1.函数 $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ . . . . .	109
7.3	仿真例子1 . . . . .	119
7.4	仿真例子2 . . . . .	121
8.1	仿真例子1 . . . . .	135
8.2	仿真例子2 . . . . .	135
9.1	算法9.1.1的仿真 . . . . .	157
9.2	算法9.1.2的仿真 . . . . .	157
9.3	算法9.1.3的仿真 . . . . .	158
11.1	确定性跟踪情形 . . . . .	187
11.2	中心跟踪情形 . . . . .	187
11.3	松跟踪情形 . . . . .	188
11.4	紧跟踪情形 . . . . .	188





# 第一部分

## 预备介绍

# 第一章 绪论

## 1.1 控制论•反馈•不确定性

控制论在一定意义上是门横断科学，它忽略不同实际系统的各种物理量的具体表现形式，从中抽象出各种系统公有的内在结构模型，得到其各个环节的关系，形成控制系统的抽象模型，将其用数学模型来刻画，然后应用数学方法来分析与综合，最后得到的结果可以适用于各种不同的具体系统。比如，一个二阶时不变线性控制系统可以同时用于描述弹簧振子、RLC电路等很多具体系统。

自动控制的思想与实践有着非常悠久的历史，远的如我国先人1000多年前的铜壶滴漏计时器、指南车等控制装置和古希腊人公元前300年设计的浮子调节器，近代的以瓦特（J.Watt）于1769年发明的飞球控制器以及1765年珀尔朱诺夫（I.Polzunov）发明的浮子水位调节器为代表。早期的自控装置和系统的设计尚处于直觉阶段，没有系统的理论指导，在协调各项性能指标常出现问题，这引发了十九世纪后半叶开始的自控理论的研究，典型的工作如[16, 48, 75, 79, 81, 92, 122]，它们对改善控制系统的性能产生了积极的影响。至1948年Wiener出版经典名著《控制论—关于在动物和机器中的控制和通讯的科学》[109]，标志着控制论作为一门科学的正式诞生。此后钱学森先生(1954)在《工程控制论》[105]中总结了当时的经典控制理论，并进一步把它提高到更高的理论高度上。这门科学经过了半个多世纪不断发展，其研究内容及其研究方法都有了很大的变化，借用库恩在其著作[62]中提出的概念，自动控制理论已经建立了自己的“科学范式”(scientific paradigm)。现代控制理论内容非常丰富，包括线性系统、最优控制、非线性控制、系统辨识、自适应控制、鲁棒控制、智能控制等很多分支，一些经典的工作如[10, 14, 30, 54, 55, 78, 88]等。对自动控制发展历史更全面的介绍可参看[33, 45, 59, 61, 67]等文献。由于数学模型、数学工具和应用领域的丰富多彩，几十年来控制理论与工程在深度和广度上都得到了很大的发展。从某种意义上来看，控制论发展的历史就是各种控制系统模型发展的历史[128]，现在还出现了所谓的“无模型”(自适应)控制[1, 2, 130]。可以预见的是，虽然有很多困难和挑战存在，今后控制理论还会有进一步的发展，特别是复杂系统等背景对控制理论提出了新的问题和挑战。关于今后自动控制可能的发展，不妨参看[83]，里面有很多专家的讨论。

回顾控制论发展的历史，我们可以看到“反馈”是一个最根本的概念，围绕着如何利用、设计、理解反馈，人们对这个概念的认识有一个逐步深入的过程：最开始只是朴素的利用反馈，慢慢发展出各种有效利用反馈的方法，并渐渐形成很丰富的理论体系。正如Kokotović在1991年Bode奖演讲[60]中所说，“反馈是我们的职业贡献给现代文明的最为深刻而激动人心的概念之一。”<sup>1</sup> 限于篇幅，我们不再具体阐述“反馈”概念内涵的具体发展。这一概念的重要性与根本性是由控制论的任务所决定的。控制论的任务是找出合乎人们需要的控制器，这种需要可以是使某一状态调节到某个值、使轨线跟踪某列参考信号、使系统某个性能指标达到最优、或者完成某种更为复杂的操作（比如使机器人或鸟群等群体形成某种队列）等等。为满足所有这些需要，控制论中都是采用反馈信息（观测到的系统状态或输出以及历史信息等）来设计控制器的。

比如：对如下非常简单的系统

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad (1.1)$$

希望状态 $x(t)$ 稳定到原点。如果不施加控制，显然轨线会发散；通过引入状态反馈 $u(t) = -2x(t)$ ，就可以使 $x(t) \rightarrow 0$ ，达到我们的目标。从数学上看，这时可以解出

$$x(t) = e^{-t}x(0), u(t) = -2e^{-t}x(0); \quad (1.2)$$

那么为什么设计控制器 $u(t)$ 不直接用式子 $-2e^{-t}x(0)$ ，而非要用状态反馈 $-2x(t)$ ？单纯从数学上看两种表示是等价的，为什么控制论上只用反馈的方式？

为回答这一看似简单的问题，必须深刻理解反馈的本质。对上面的例子而言，似乎采用反馈的原因是计算 $-2e^{-t}x(0)$ 比较复杂（有的时候甚至不可能给出解析表达式），但事实上更根本的原因是：系统的模型只是对现实系统的一种抽象或近似，而且即便是完全精确的模型也可能存在量测上的误差，也就是说系统总可能有些不能避免的不确定性，为减少这些不确定性带来的影响，我们必须采用反馈控制，这就是控制论基本而深刻的思想。就上面的例子，不妨假设模型完全精确，但初始状态测量上有 $\pm 0.1$ 的误差，真实的 $x(0) = 0.2$ ，但测量的 $x(0) = 0.1$ ，如果不采用反馈控制，系统很快就会发散，但通过反馈控制则不存在这样的问题。

---

<sup>1</sup>原文: Feedback is one of the deepest and most inspiring concepts that our profession has contributed to modern civilization.

因此，反馈是自动控制中最为根本的概念，其主要作用是减少系统中各种不确定性对控制性能的影响。在控制理论的各分支中，直接考虑并研究系统不确定性的领域主要有鲁棒控制与自适应控制。

鲁棒控制的特点是：控制器的结构和参数通常都是固定的，但控制器能在一定范围内对付系统模型的不确定性。为刻画系统模型（通常是参数化的一类系统）的不确定性的程度，通常引入某种度量（如 $\mathcal{H}_\infty$ 模等）来衡量模型间的差异或“距离”，然后在这种度量下，考虑以某个标称模型为球心的一定半径的“球”，通过对标称模型设计好控制器，这个控制器能使“球”内的所有系统都达到稳定，球的半径大小刻画了所容许的不确定性大小。在鲁棒控制中，控制器是固定的或从某一（具有特定结构特点的）集合中选取，一般只能对付一定小范围内的不确定性。

自适应控制是另一种对付系统不确定性的方法或思想。其基本思想是，虽然系统有不确定性，我们不可能先验的完全知道系统的真实参数等信息，但随着系统的运行，我们将拥有越来越多的后验信息，即所有的历史数据（以往所有的控制输入和观测到的系统状态或输出），通过利用这些信息，我们可以设法（通常用一些系统辨识的算法）调整对系统参数的估计，一边在线调整一边根据当前的估计施加控制，这样就有可能逐渐对真实系统有越来越准确的了解，同时最后达到使系统稳定的目标。因此，自适应控制器一般来说可能对付较大范围的不确定性，控制器没有一成不变的参数，能够不断调整；这也造成使用自适应控制器的闭环系统一般来说非常复杂，稳定性分析起来较为困难，同时由于噪声及观测误差等因素的影响，不一定保证对系统的估计或控制越来越好，从而整个系统的性能不一定很好，这是自适应控制方法的缺点。传统自适应控制器一般由具体的辨识算法与“必然等价原则”构成，因而某种意义上也是一类结构固定的控制。

显然，这些已有的控制器设计方法并没有涵盖所有可能的方案，那么，当我们不限制控制器为已有的类型时，反馈控制在对付不确定性上具有什么样的最大能力？是否会有一些本质局限？这就是反馈机制的能力与极限问题，下一小节将进一步讨论，这也是本文讨论的主题。

本文的工作涉及到各种不确定性，包括结构不确定性、参数不确定性、外部不确定性、本质上有限的模型不确定性、复杂系统中的不确定性等等。本文将通过反馈控制来设法对付这些不确定性，较多的涉及到自适应控制，也会涉及到少部分鲁棒控制的内容。

## 1.2 反馈机制的能力与极限

前一节简单介绍了控制论的一些内容与“反馈”概念的含义。归纳起来，控制论或控制理论主要是以定量的方式研究如何设计有效的反馈规律，从而使受控的动态系统达到所期望的目标的一门科学[45]。虽然控制论作为一门独立学科只有几十年的历史，但自动控制已经在非常广泛的领域内都取得成功的应用，远的如蒸汽机对工业革命的贡献、反馈放大器对远距离通讯的贡献、美国阿波罗登月计划；近的如我国的神六载人飞船上天，当今大型电力系统，高度自动化的生产和制造系统，汽车工业，迅速发展的通讯网络，以及不断更新的家用电

器。

在一定程度上，多数已有的控制工程与理论，核心都是着眼于设计某一类特殊的控制器，揭示反馈控制能带来什么样的效果或好处。毫无疑问，从工程角度上看，结构简单容易实现的控制器受到人们的欢迎，因此从理论上研究结构固定的控制器所能达到的性能极限具有很大的工程意义，这方面也吸引了一些学者的注意，特别是对于线性系统已有了较多的结果，出现了结构化奇异值、Bode积分等方法，相关内容可参考[3, 22, 29, 94, 100, 104]等文献。但另一方面，着眼于整个反馈机制（即所有可能的控制器的集合）的研究则不多，尤其是关于整个反馈机制的极限则研究更少。从哲学上看，对后者的研究无疑具有重要的意义，它们对于控制理论本身的贡献正类似于Gödel定理之于数学、Heisenberg测不准原理之于量子力学、Shannon采样定理之于信息论、Cramér-Rao不等式之于统计学、Arrow不可能性定理之于经济政治。

因此，归结起来，在控制论中，两个基本的问题是：如何有效利用反馈？反馈的能力究竟有多大？正是基于对以上问题的深入思考，近十年来，郭雷院士开始了反馈机制能力与极限这一新的研究领域，并与其学生做出了这方面一系列原创性的工作。本文的工作是该方向上已有工作的继续，为更好地理解本文内容，在此先简单的介绍一下反馈机制能力与极限问题。

首先需要对反馈机制给出数学上的严格定义(引自[43])。

**定义 1.1.** 在任一时刻 $t$ ，我们说系统的输入 $u_t$ 是一反馈信号，在数学上是指存在某一个从 $(t+1)m$ 维空间 $\mathcal{R}^{(t+1)\times m}$ 到 $l$ 维空间 $\mathcal{R}^l$ 的可测映射 $h_t: \mathcal{R}^{(t+1)\times m} \rightarrow \mathcal{R}^l$ 使得

$$u_t = h_t(y_0, y_1, \dots, y_t), \quad (1.3)$$

亦即 $u_t$ 是到 $t$ 时刻为止，已观测到的信息 $\{y_0, y_1, \dots, y_t\}$ 的某一个“变换”（可以

是定常或时变的, 线性或非线性的)。

**定义 1.2.** 所有时刻的反馈信号构成一个反馈规律  $u = \{u_t, t \geq 0\}$ 。

**定义 1.3.** 进一步, 反馈机制可定义为所有可能的反馈规律所构成的集合:

$$\mathcal{U} = \{u \mid u \text{ 是任意反馈规律}\} \quad (1.4)$$

下面我们以一个看似简单的系统来说明什么是反馈机制能力与极限问题。考虑如下系统

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1},$$

其中未知函数  $f(\cdot)$  属于一个已知函数集  $\mathcal{F}$ , 控制律  $u_t$  属于集合  $\mathcal{U}$ , 而  $\{w_t\}$  为噪声序列。显然集合  $\mathcal{F}$  严格刻画了该系统的内部不确定性, 我们要问: 当给定一个不确定性集  $\mathcal{F}$  时, 是否存在(或可否构造)一个反馈律  $u_t$  总能镇定以上不确定系统? 这一问题看起来非常基本, 但它并没有显而易见的答案, 对它的回答取决于函数集  $\mathcal{F}$  的内在结构和大小。因此反馈机制能力与极限问题就是要研究能否用反馈机制  $\mathcal{U}$  来对付不确定性集  $\mathcal{F}$ , 即这两个集合间的深刻联系。一旦从理论上认识了反馈机制  $\mathcal{U}$  的最大能力(不局限于某一特殊反馈规律), 阐明了  $\mathcal{U}$  能够做什么(正面结果) 和  $\mathcal{U}$  不能做什么(反面结果), 就有助于深化人们对控制系统复杂性的认识, 并避免做一些无用功。这一方向上的定量研究[42, 113, 116, 117, 118] 还比较少, 一个较好的综述可见郭雷院士在2002年国际数学家大会上的邀请报告[43, 44] 或文献[115]。这些结果涉及到离散时间参数非线性系统、离散时间非参数非线性系统、具有采样反馈的连续时间非参数不确定系统、具有隐Markov跳变的随机切换线性系统。本文将在部分已有结果(参看后面章节的介绍) 基础上作进一步推广并探讨一些相关的问题。

### 1.3 本文内容与结构安排

本文的内容与结构安排如下:

首先在第一部分中将作一些预备介绍, 其中本章为本文的主题—反馈控制的能力与极限做了简单的铺垫; 下一章中将介绍一下迭代动力系统的一些概念, 它们与本文的研究有着密切的联系。

第二部分将在本章介绍的关于反馈机制能力与极限问题的框架下, 对几类具体系统研究了反馈机制的能力与极限。这几类系统分别是: 结构未知情形一

类可由多个Lipschitz常数刻画的不确定系统，主要得到了一些不可能性定理，推广了[121]中的结果；参数未知情形一类高阶非线性高斯噪声模型，主要得到了一个不可能性定理，推广了[42]中的反面结果；接着考虑了一个简单的同时具有参数和非参数不确定性的一阶有界噪声模型，构造出了同时对付这两种内部不确定性的控制器，并在一些条件下证明了闭环系统的稳定性。由于该部分所考虑问题的难度，一些问题解决得还不彻底，有待于今后进一步研究。

第三部分将从一个新的角度考虑反馈控制的能力极限问题，即希望解决不确定函数集 $\mathcal{F}$ 可选出有限个代表函数时能否总能找出反馈控制保证闭环稳定的问题。在该部分中我们基于几种不同的思想，设计了多种算法来给出自适应控制律，并分别研究了对应闭环系统的稳定性。这些结果表明在比较弱的条件下，可利用已知的有限个模型来构造控制器对付系统本质上有限的内部不确定性。该部分的研究与混杂系统尤其是切换系统的研究有密切的联系，但在思路和方法上区别于已有的大量研究。

从某种意义上，前几部分都仅仅考虑如何用反馈控制对付单系统中内部不确定性的问题，而第四部分将着眼于研究多个子系统间相互的耦合也有不确定性的情形，致力于解决在反馈控制能对付单个子系统的前提下，能否通过个体局部反馈控制对付子系统间耦合不确定性的问题。在该部分中，我们将提出一个复杂系统自适应控制问题的框架，并在此框架下分别研究了两类问题：首先是一类离散时间多主体系统的自适应同步问题，对每个个体设计了基于最小二乘的学习与控制算法，证明了在几种不同跟踪目标下，个体实现局部跟踪目标的同时整个系统能实现平均意义下的同步；然后是一类离散时间多主体系统的自适应控制问题，对每个个体设计了局部Åström-Wittenmark自校正调节器，证明了使得单系统Åström-Wittenmark自校正调节器有稳定性和最优性的那些条件同样保证了整个系统的稳定性与最优性。这一部分的研究还只是个开始，还有很多问题值得进一步研究。

## 第二章 迭代动力系统

本章将简单介绍迭代动力系统的一些基本概念，并说明它们与本文主题的关系。

### 2.1 动力系统的基本概念

从广义角度来看，动力系统的外延很丰富。比如天体的运动、化学反应中物质浓度的变化、人口或种群的演化、商品价格的涨跌、传染病的传播过程等都可用某些动力系统来描述。简单说来，动力系统就是研究现实问题中状态 $x$ 随时间 $t$ 变化而变化的动态规律。由于动力系统具有非常丰富的实际背景，它有着漫长的发展历史[27]，并且由于研究角度与具体研究对象的不同，出现了很多涉及动力系统的研究领域。本章无意于对动力系统作全面的介绍(参看[27, 53, 124, 126, 138]等文献)，甚至于非常简单地概括其内容也是不可能的，只是希望介绍一点基本的概念及其研究的问题，并说明它们与本文内容的一些联系。

在动力系统理论中，不仅研究平衡状态、周期状态等基本运动状态的存在性与稳定性，更强调系统的内在结构如何影响运动轨迹的拓扑结构或性质。它重视运动方式的结构稳定性，探索结构被破坏或遭到扰动时运动形式所发生的质和量上的变异。上述“内在结构（及其变化）决定外在运动形式（及其变化）”的思想几乎在所有关于动力系统的研究中都起着至关重要的作用。从某种意义上，“动力系统是从几何、拓扑的观点来观察事物，用分析、代数的手段来分析处理问题”[138]。所以动力系统的研究有着深厚的数学基础。

下面从狭义的角度来介绍一点动力系统的概念。这些概念从不同时刻状态变换的角度强调了动力系统关于时间的群（半群）结构，这往往是动力系统研究的一个出发点，无论其具体形式是微分方程还是差分方程。

**定义 2.1.** [138] 一个映射 $\phi^t(x) = \phi(t, x) : R \times X \rightarrow X$  称为集合 $X$ 上的一个流，如果对任意的 $t_1, t_2 \in R, x \in X$ ，满足：(i) $\phi^0(x) = x$ ；(ii) $\phi^{t_1+t_2}(x) = \phi^{t_1}(\phi^{t_2}(x))$ 。如果上述条件仅在 $t_1, t_2 \in R_+$ 上定义，则称 $\phi^t(x)$ 为一个半流。如果 $X$ 是拓扑空间， $\phi(t, x)$ 连续，则称 $\phi$ 为连续流（半流），或者称为 $X$ 上的一个连续（半）动力系



统；类似的，如果 $\phi(t, x)$ 中的 $t$ 仅取值于 $Z$ （或 $Z_+$ ），则称为 $X$ 上的一个离散（半）动力系统。

此处我们更关心通过迭代方式产生的离散动力系统。最简单的迭代动力系统可表示为 $x_{k+1} = f(x_k)$ ，显然 $x_k = f(x_{k-1}) = f(f(x_{k-2})) = \cdots = f^{[k]}(x_0)$ ，序列 $\{x_k\}$ 即可称为上述动力系统的一个轨道。经典的动力系统理论着眼于本节定义的狭义动力系统（特别是刚提到的简单迭代动力系统），对其不动点、周期点、混沌轨道、分岔现象、结构稳定性等方面作了很多的研究，这些内容与本文关系不大，这里不作进一步介绍。本文中涉及到的动力系统看起来都要更加复杂，研究的角度与手段也不同于经典的动力系统理论，但究其本质却有相近之处。下面将从广义的角度讨论迭代动力系统，即通过一定方式迭代产生的序列，我们主要考虑差分方程和差分不等式，因为它们与本文的内容有密切的关系。

## 2.2 差分方程

为介绍差分方程，首先引入差分算子 $\Delta$ 、移位算子 $E$ 和恒等算子 $I$ ：

$$\Delta y(x) \triangleq y(x+1) - y(x); \quad Ey(x) \triangleq y(x+1); \quad Ix \triangleq x.$$

显然 $\Delta = E - I$ ，从而 $\Delta$ 和 $E$ 可以相互表出：

$$\begin{aligned} \Delta^k &= (E - I)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i, \\ E^k &= (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\binom{k}{i}$ 表示二项式系数。

**定义 2.2.** 如下形式的方程（由 $\Delta$ 算子表达）

$$F(t, y(t), \Delta y(t), \cdots, \Delta^k y(t), g(t)) = 0, \forall t \in \mathbf{N} \tag{2.2}$$

或更常见的形式（由 $E$ 算子表达）

$$G(t, y(t), Ey(t), \cdots, E^k y(t), g(t)) = 0, \forall t \in \mathbf{N} \tag{2.3}$$

称为 $k$ 阶差分方程。

**注2.2.1.**

差分方程得名于形式(2.2), 但最常用的是可由形式(2.2)得到的如下形式:

$$y(t+k) = E^k y(t) = \Phi(t, y(t), y(t+1), \dots, y(t+k-1), g(t)), \forall t \in \mathbf{N}. \quad (2.4)$$

借助算子 $\Delta$ , 可以推得差分方程与连续情形的微分方程有许多类似的性质和方法。由于篇幅限制, 我们不在此详细列举这些类似之处, 请参看文献[63, 133]。对于差分方程, 尤其是线性差分方程以及与(偏)微分方程有关的差分格式, 已经有很多的研究, 这些研究侧重于以下几个方面: (1) 如何求解差分方程的解, 如算子变换法、常数变易法、生成函数法、桥函数法、Z变换法、数学机械化方法等。(2) 研究解的渐近性质, 比如阶的估计、稳定性分析等。(3) 研究周期解、混沌解、单调解、正解的存在性。(4) 研究其在数值分析、偏微分方程、数学建模、组合数学等方面的一些应用。

尽管差分方程的研究已经有很长的历史, 而且如上所述差分方程与微分方程有很多相似之处, 但这绝不意味着我们已能解决大部分差分方程的问题。有时看起来非常简单的差分方程, 比如 $x_{n+1} = ax_n + \frac{b}{x_{n-k}}$ , 分析起来就有相当难度。与本文内容有关的一些差分方程, 一般不能通过把解求出来来研究其性质。而且, 在反馈机制能力极限的研究中, 需要的可能不仅仅是渐近的性质, 这是带来的另一些困难。一些具体的讨论请参看后面的章节。

## 2.3 差分不等式

**定义 2.3.** 如下形式的不等式

$$y(t+k) \leq \Phi(t, y(t), y(t+1), \dots, y(t+k-1), g(t)), \forall t \in \mathbf{N} \quad (2.5)$$

称为 $k$ 阶I型差分不等式。如果上式中的不等号 $\leq$ 换成 $\geq$ , 则称为 $k$ 阶II型差分不等式。更一般的I型差分不等式可能具有形式

$$y(t+1) \leq \Phi(t, y(t), y(t-1), \dots, y(0), g(t)), \forall t \in \mathbf{N}, \quad (2.6)$$

可类似定义一般的II型差分不等式。

差分不等式往往与相应的差分方程有密切的关系, 本文后面的章节将对涉及到的一些差分不等式作进一步讨论。下述的Gronwall型不等式为一个典型的例子: 设 $K$ 表示一个单调算子,  $\mathcal{P}$ 表示一个非负项, 则 $\mathcal{Y} \leq \mathcal{P} + K\mathcal{Y}$ 型的不等式

的解的上界可以通过求解相应的差分方程  $U = \mathcal{P} + KU$  得到。这种类型的不等式研究很多, 例如:

**定理 2.1.** 设  $g(n, s, y) : N \times N \times R$ ,  $g$  对  $y$  单调不减,  $p_n \geq 0$ , 则差分不等式

$$y_n \leq \sum_{s=0}^{n-1} g(n, s, y_s) + p_n \quad (2.7)$$

的解满足  $y_0 \leq p_0 \Rightarrow y_n \leq u_n$ , 其中  $u_n$  为差分方程

$$u_n = \sum_{s=0}^{n-1} g(n, s, u_s) + p_n, \quad u_0 = p_0 \quad (2.8)$$

的解。

还有很多类似的定理, 它们统称为“比较原理”, 这里不再列举, 请参考[4, 63]等文献。不幸的是, 本文中涉及到的差分不等式, 其右端往往有正有负, 有增有减, 由于不能用单调算子刻画, 所以不能用这些已知结果来解决, 有一定难度, 需要一些新的方法, 请参看后面章节的具体讨论。

## 2.4 含参迭代动力系统

我们已经知道, 动力系统的内在结构将决定其轨道的性质。如果动力系统的方程中含有参数, 那么不同的参数取值就可能导致不同的轨道性质(在狭义动力系统理论中常被称为“分岔”)。本节将简单介绍含参迭代动力系统。

**定义 2.4.** 对一个含参迭代动力系统, 使得系统(在某种意义下)稳定的参数的集合称为该含参迭代动力系统的稳定参数域; 相应地, 使得系统不稳定的参数的集合称为该系统的不稳定参数域。

下面举一个简单的例子说明上面的概念:

### 例子 2.4.1.

考虑  $x_{t+1} = ax_t + d$ , 这里  $d$  为正常数。我们考虑有界意义下的几乎全局稳定性(允许一个 *Lebesgue* 零测集的例外情形), 显然  $\{a : |a| < 1\}$  为该系统的稳定参数域, 而  $\{a : |a| \geq 1\}$  为该系统的不稳定参数域。

### 例子 2.4.2.

考虑差分不等式

$$0 \leq x_{t+1} \leq a \min_{i < t} \max(x_t, x_i) + d,$$

这里常数  $d > 0, a > 0$ 。可以证明: (i) 当  $a < 1$  时, 任意解序列  $\{x_t\}$  必有界。事实上, 如若不然, 可以取单增子序列  $x_{t_k}$  使得对任意  $t_k \leq i < t_{k+1}$  都有  $x_i \leq x_{t_k} < x_{t_{k+1}}$ , 从而易得  $x_{t_{k+1}} \leq ax_{t_k} + d$ , 再由上一例子,  $\{x_{t_k}\}$  有界, 与反证假设矛盾! (ii) 当  $a \geq 1$  时, 不能保证  $\{x_t\}$  必有界。这时, 显然  $x_t = td$  单增趋于无穷, 但满足前面的差分不等式。

以上例子非常简单, 但对于多数非线性的含参迭代动力系统, 特别是系统中还含有随机噪声的情形, 对稳定或不稳定参数域的分析往往比较复杂。因篇幅限制, 本节不再举其他例子, 可参看其它介绍差分方程、差分不等式、非线性动力学等方面的文献 (如 [4, 25, 63, 66, 80, 97, 133])。

## 2.5 与反馈机制能力极限研究的联系

本文的主题是反馈机制的能力极限, 对它的研究与含参迭代动力系统有密切的联系。从后文可以看出, 在研究反馈机制能力极限的过程中, 对于有结构或参数不确定性的系统,

1. 为了得到正面结果, 我们需要构造合适的反馈控制律来设法利用后验信息减少系统不确定性的影响, 然后得到的闭环系统通常非常复杂, 为证明其稳定性, 最后问题往往归结为求解某个 I 型差分不等式的稳定参数域问题;
2. 为了得到反面结果, 我们需要对任意可能的控制律, 构造出一个不确定函数集中的系统, 使得系统的输出发散, 为保证构造出的系统的不稳定性, 最后问题往往归结为求解某个 II 型差分不等式的不稳定参数域问题。

从后面的章节中, 对一些具体的不确定系统, 我们将看到以上思想的应用, 在此不再举例。总的来说, 对一个不确定控制系统, 反馈机制所能达到的最大能力, 取决于系统的不确定函数集  $\mathcal{F}$  的内在结构以及其“大小”。但从目前已知的所有结果和本文中后面的工作来看, 由于反馈机制  $\mathcal{U}$  中反馈律的任意复杂性, 目前只能针对  $\mathcal{F}$  的一些特定结构进行研究, 能否在今后发展出一整套关于  $\mathcal{F}$  内在结构与  $\mathcal{U}$  的定量关系的统一理论, 仍是未知数, 有待进一步研究。

## 2.6 本章小结

本章简单介绍了含参迭代动力系统 (差分方程和差分不等式) 以及它们与

本文主题的联系。这一思想将贯穿本文，在后面的章节中将看到本文讨论的各种问题最后都将归结为对某些含参迭代动力系统的研究。

## 第二部分

### 几类系统的反馈机制能力极限研究

### 第三章 结构未知情形—多Lipschitz常数刻画的不确定系统

在本章中, 我们研究一类 $p$ 阶非线性自回归控制系统在结构不确定情形下的反馈机制能力极限问题, 结构不确定性的由多个Lipschitz常数(即 $L_1, L_2, \dots, L_p$ )来刻画。本章主要结果表明, 如果 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 满足某些代数条件, 则对相应的不确定性系统, 不存在全局稳定的反馈控制律。本章结果是[121]中结果的推广。

#### 3.1 已有结果

反馈机制能力和极限问题的研究始自[42]。在[42]中对一类参数未知的离散时间非线性系统, 严格证明了当非线性的增长率低于 $O(x^4)$ 时, 系统是全局稳定的; 并且当其增长率超过 $O(x^4)$ 时, 不可能设计出使得全局稳定的反馈律。这个不确定性定理被推广到一类具有未知参数向量的不确定非线性系统, 参见[113]。

最近, 在[116]中研究了一类具有非参数不确定性的一阶离散时间非线性控制系统的反馈能力极限问题, 即

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1}, \quad (3.1)$$

其中未知函数 $f(\cdot)$ 属于已知集合 $\mathcal{F}(L) = \{f : \|f\| \leq L\}$ , 这里 $\|\cdot\|$ 为一个非线性函数的空间上引入的广义Lipschitz范数。基于这个范数, 该文对反馈机制的能力极限给出了简单而完全的刻画: 如果 $L < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ , 则存在反馈控制律使得对任意的 $f \in \mathcal{F}(L)$ , 相应的闭环系统是全局稳定的; 如果 $L \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ , 则对任意的反馈控制律和任意 $y_0 \in \mathcal{R}^1$ , 总存在某个 $f \in \mathcal{F}(L)$ 使得相应的闭环系统不稳定。因此 $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 刻画出整个反馈机制的能力和极限, 这一临界数值曾被称为“魔数”(magic number)。这一结果的证明显示如下的多项式

$$P(x) = x^2 - (L + \frac{1}{2})x + L \quad (3.2)$$

起至关重要的作用, 其中 $L$ 是刻画动力系统不确定性大小的Lipschitz常数。

类似地, 对具有不确定性的连续时间非线性控制系统的采样控制问题, 已经证明如果采样周期大于一定值, 那么采样反馈控制一般不是全局稳定的, 即使非线性部分具有线性增长率时也是如此(参见[118])。

在[121]中, [116]中的系统被推广为更一般的 $p$ 阶非线性控制系统, 其中非线性函数集 $\mathcal{F}$ 不确定性的的大小通过单个Lipschitz常数来刻画, 该文证明了对这种不确定系统, 如果 $p$ 和 $L$ 满足如下关系:

$$L + \frac{1}{2} \geq \sqrt[p]{pL}(1 + \frac{1}{p}), \quad pL > 1, \quad (3.3)$$

那么就不存在使得系统全局稳定的控制律。从这一结果的证明中我们也可以看出多项式

$$P(x) = x^{p+1} - (L + \frac{1}{2})x^p + L \quad (3.4)$$

起着重要作用。

## 3.2 问题描述

在本章中, 我们将进一步推广上面这个结果。为简单起见, 我们考虑如下离散时间非线性 $p$ 阶控制系统模型:

$$y_{t+1} = g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1}) + u_t + w_{t+1}, \quad t \geq 0 \quad (3.5)$$

其中非线性函数 $g(\cdot)$ 的不确定性由多个Lipschitz常数 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 来刻画。我们将要讨论: (1)这些Lipschitz 常数在什么条件下, 不存在反馈律使得系统全局稳定? (2)这些Lipschitz 常数在什么条件下, 能找到反馈律使得系统全局稳定?

本章中还讨论了前人的一些结果和本章结果的联系。在本章中考虑的系统, 由于不确定性用多个参数来刻画, 不可能用一个或多个临界数来刻画整个反馈机制的能力和极限, 因此一般而言找到相应问题的答案变得更加困难。本章是对这一目标的一个尝试。

## 3.3 反面结果

### 3.3.1 反面—主要结果

对反面结果而言, 把噪声去掉并不影响问题本质(参见注3.3.2)。因此为方便起见, 下面只考虑系统仅有内部不确定性的情形。

考虑如下 $p(p \geq 1)$ 阶离散时间非线性模型:

$$y_{t+1} = g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1}) + u_t, \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$



其中,  $y_t$ 和 $u_t$ 分别为系统的输出及输入序列; 未知函数 $g(\cdot) : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^1$ 属于如下函数类:

$$\mathcal{G}(L) \triangleq \{g(\cdot) : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^1 \mid |g(X_1) - g(X_2)| \leq \sum_{i=1}^p L_i |X_1^{(i)} - X_2^{(i)}|, \forall X_1, X_2 \in \mathcal{R}^p\} \quad (3.7)$$

其中 $L = (L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{R}^p$ 是含有非负分量( $L_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p$ )的常向量, 且

$$X_j = (X_j^{(1)}, X_j^{(2)}, \dots, X_j^{(p)}) \in \mathcal{R}^p, j = 1, 2.$$

### 注3.3.1.

假设对任意 $i = 1, 2, \dots, p$ , 函数 $f : \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^1$ 满足

$$|f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^{(1)}, x_{i+1}, \dots, x_p) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^{(2)}, x_{i+1}, \dots, x_p)| \leq L_i |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|,$$

那么可证得 $f \in \mathcal{G}(L)$ 。

直观上,  $\mathcal{G}(L)$ 是一个由多个Lipschitz常数 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 确定的函数类。从(3.7)中可以看出,  $L_1, L_2, \dots, L_p$ 越大, 类 $\mathcal{G}(L)$ 代表的不确定性越大。因此, 我们可以把 $L$ 作为衡量 $\mathcal{G}(L)$ 不确定性大小的度量。

根据第一章定义的反馈机制, 我们可以定义以下关于整个反馈机制能力的概念。

**定义 3.1.** 对于系统(3.6), 如果存在反馈控制律 $\{u_t\} \in \mathcal{U}$ 使得对任意函数 $g(\cdot) \in \mathcal{G}(L)$ 和任意初值 $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in \mathcal{R}^p$ , 相应的闭环系统满足 $\sup_{t \geq 0} |y_t| < \infty$ , 则称系统(3.6)可全局镇定。

在定义3.1中, 系统(3.6)中存在两种不确定性: (i)内部不确定性(或结构不确定性)—由 $\mathcal{G}(L)$ 表述; (ii)初始条件的不确定性—由区域 $D$ 表述, 其中 $D = \mathcal{R}^p$ (因此我们使用术语“全局”)。在整个系统稳定性研究方面内部不确定性起至关重要的作用。当内部不确定性足够大时, 就可能出现系统(3.6)对任意控制律不可稳。定义如下:

**定义 3.2.** 对于系统(3.6), 如果存在无界区域 $D \subseteq \mathcal{R}^p$ 使得对任意初始值

$$(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D$$

和任意反馈控制律 $\{u_t\} \in \mathcal{U}$ , 总存在某个 $g(\cdot) \in \mathcal{G}(L)$ 在该控制律下对应的闭环系统不稳定, 即 $\sup_{t \geq 0} |y_t| = \infty$ , 则称系统(3.6)对任意控制律不可稳,

**注3.3.2.**

在以上定义中, 我们没有考虑外部不确定性(噪声 $\{w_t\}$ ), 对反面结果来说, 这并不影响问题实质。事实上从定理证明细节中容易看到当确定性或随机干扰存在时结果仍然成立。

**注3.3.3.**

在定义3.2中, 区域 $D$ 仅依赖于内部不确定性大小。从某种意义上来说区域 $D$ 对应于一个不能被任何反馈律对付的关于初始条件不确定性的区域。为简单起见, 在此仅要求 $D$ 是非空和无界的。在有些情况下, 构造出条件更严格的区域 $D$ 更具说服力, 比如: 在有随机噪声的情形下, 由于零测集(仍有可能无界)对随机系统通常来说没有意义, 我们可能希望区域 $D$ 具有正的测度。事实上这一点是可以做到的, 对下面的定理, 我们可以进一步证明构造出的相应区域 $D$ 的Lebesgue测度是无穷大, 其证明细节在此略去。

下面我们将证明如果Lipschitz 常数 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 满足某些条件, 则系统(3.6)对任意控制律不可稳。也就是说, 常数 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 的取值区域决定了整个反馈机制的极限。为方便起见, 我们称这样的 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ 的集合为系统(3.6)的不可稳区域。

**定理 3.1.** 对于常数 $L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, \dots, L_p \geq 0$ , 如果以下差分方程的解 $\{x_n, n \geq 0\}$  是严格单增的:

$$x_n = (L_1 + \frac{1}{2})x_{n-1} + (L_2 - L_1)x_{n-2} + \dots + (L_p - L_{p-1})x_{n-p} - L_p x_{n-p-1} \quad (3.8)$$

其初始条件为

$$x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = \dots = x_{-p} = 0, \quad (3.9)$$

那么系统(3.6)对任意控制律不可稳。

**注3.3.4.**

假设我们定义 $\mathcal{L}_p$  为满足以上条件的 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ 的集合, 则定理3.1 可被重述为: 如果 $(L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{L}_p$ , 那么系统(3.6) 对任意控制律不可稳。

**推论 3.2.** 下列条件为 $(L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{L}_p$ 的必要条件:

$$(i) L_1 > \frac{1}{2}; L_2 > -L_1^2 + L_1 + \frac{1}{4} \text{ (当 } p \geq 2 \text{);}$$

(ii) 多项式

$$P(z) = z^{p+1} - (L_1 + \frac{1}{2})z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \cdots - (L_p - L_{p-1})z + L_p \quad (3.10)$$

在 $(1, \infty)$ 有一实根。

### 注3.3.5.

考虑以下解析函数在原点附近小邻域内的Taylor展开

$$F(z) \triangleq \frac{1}{1 - (L_1 + \frac{1}{2})z - (L_2 - L_1)z^2 - \cdots - (L_p - L_{p-1})z^p + L_p z^{p+1}} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots \quad (3.11)$$

可以很容易证明定理3.1中的序列 $\{x_n\}$ 也就是以上方程的系数 $\{c_n\}$ 。显然由Taylor公式,  $x_n = c_n = n!F^{(n)}(0)$ , 然而 $F(\cdot)$ 的高阶导数一般很难算出。能否将 $x_n$ 用 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 来显式表示呢? 现在我们用另一种方法来计算 $x_n$ 。记 $a_1 = L_1 + \frac{1}{2}, a_2 = L_2 - L_1, \cdots, a_p = L_p - L_{p-1}, a_{p+1} = -L_p$ , 则 $F(z) = \frac{1}{1 - (a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{p+1} z^{p+1})}$ 。并应用公式 $\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ 和多项展开公式[19, 101], 对任意的 $n > 0$ , 我们有

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{n_1+2n_2+\cdots+(p+1)n_{p+1}=n} \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_{p+1})!}{n_1!n_2!\cdots n_{p+1}!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_{p+1}^{n_{p+1}} \\ &= \sum_{n_1+2n_2+\cdots+(p+1)n_{p+1}=n} \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_{p+1})!}{n_1!n_2!\cdots n_{p+1}!} \times \\ &\quad \times (L_1 + \frac{1}{2})^{n_1} (L_2 - L_1)^{n_2} \cdots (L_p - L_{p-1})^{n_p} (-L_p)^{n_{p+1}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中此式是对所有满足 $n_1+2n_2+\cdots+(p+1)n_{p+1} = n$ 的非负整数 $n_1, n_2, \cdots, n_{p+1}$ 求和。

从注3.3.5和定理3.1, 由 $\mathcal{L}_p$ 的定义可以看出, 这一区域还不能解析地显式表达出来。因此为保证 $(L_1, L_2, \cdots, L_p) \in \mathcal{L}_p$ , 我们需要一些其它的充分条件, 在以下的定理中将会给出一些这样的条件。

**定理 3.3.** 假设 $\lambda \in (1, \infty)$ 是以下不等式的实解

$$P(z) \triangleq z^{p+1} - (L_1 + \frac{1}{2})z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \cdots - (L_p - L_{p-1})z + L_p \leq 0. \quad (3.13)$$

且如果  $L_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) 和  $\lambda > 1$  满足以下条件:

$$(\star) \begin{cases} K_1 & \triangleq L_1 + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0; \\ K_2 & \triangleq \lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + L_2 - L_1 \geq 0; \\ K_3 & \triangleq \lambda^2(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \lambda(L_2 - L_1) + L_3 - L_2 \geq 0; \\ \vdots & \\ K_{p-1} & \triangleq \lambda^{p-2}(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-2} \lambda^{p-k-2}(L_{k+1} - L_k) \geq 0; \end{cases} \quad (3.14)$$

那么必存在一个无界区域  $D \subseteq \mathcal{R}^p$ , 使得对任意的初值

$$(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D$$

和任意的反馈控制律, 总存在某个  $g(\cdot) \in \mathcal{G}(L)$  使得相应的闭环系统(3.6)不稳定, 即  $\sup_{t \geq 0} |y_t| = \infty$ . [注: 区域  $D$  将会在定理证明中被构造出来.]

### 注3.3.6.

对  $L_1 = L_2 = \dots = L_p = L$  的情形, 多项式  $P(z) = z^{p+1} - (L + \frac{1}{2})z^p + L$  与(3.3)中的多项式一致。在这种情况下, 可以看出[121]中的主要定理是定理3.3的推论: 事实上, 条件(★)变为  $L + \frac{1}{2} \geq \lambda > 1$ , 与  $L + \frac{1}{2} \geq \sqrt[p+1]{pL}(1 + \frac{1}{p})$  等价[见注3.3.7]。特别的,  $p = 1$ 时,  $P(z) = z^2 - (L + \frac{1}{2})z + L$  与(3.2)中的二次多项式一致。因此本定理推广了[121]和[116]中的有关结果。

### 注3.3.7.

容易证明: 不等式  $P(z) = z^{p+1} - (L + \frac{1}{2})z^p + L \leq 0$  有一个解  $\lambda \in (1, L + \frac{1}{2}) \iff L + \frac{1}{2} \geq \sqrt[p+1]{pL}(1 + \frac{1}{p}), pL > 1$ 。事实上, 由于

$$P'(z) = (p+1)z^{p-1} \cdot (z - \frac{p}{p+1}(L + \frac{1}{2}))$$

和  $P(1) = \frac{1}{2} > 0, P(L + \frac{1}{2}) = L > 0$ , 可知  $z^* = \frac{p}{p+1}(L + \frac{1}{2})$  是  $z > 1$  时  $P(z)$  的极小值点, 因此  $P(z) \leq 0$  有一个解  $\lambda \in (1, L + \frac{1}{2}) \iff P(z^*) \leq 0 \iff L + \frac{1}{2} \geq \sqrt[p+1]{pL}(1 + \frac{1}{p})$ 。

### 注3.3.8.

可以给出许多充分条件来保证  $P(z) \leq 0$  有一解  $\lambda \in (1, \infty)$ 。例如,  $P(L_1 + \frac{1}{2}) < 0$  即为这样的条件。也可以参考[113, 推论1-3]中给出的一些条件。

**注3.3.9.**

条件(\*), 看起来较为复杂, 但是后面的例子将说明一般来说不能去掉这一条件。在一些特殊情形下, 这一条件能大大简化(参看推论3.6)。不过, 在某种意义上还可以放松这一条件(参看下面的定理3.7)。

进一步, 我们可以证明以下命题:

**命题 3.4.** 如果 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 满足定理3.3的条件, 则对任意的 $\bar{L}_1 \geq L_1, \bar{L}_2 \geq L_2, \dots, \bar{L}_p \geq L_p$ 和同一个 $\lambda$ , 定理3.3中的条件仍然成立。

证明: 为避免混淆, 记

$$\bar{P}(z) = z^{p+1} - (\bar{L}_1 + \frac{1}{2})z^p - (\bar{L}_2 - \bar{L}_1)z^{p-1} - \dots - (\bar{L}_p - \bar{L}_{p-1})z + \bar{L}_p \quad (3.15)$$

且满足

$$P(z) = z^{p+1} - (L_1 + \frac{1}{2})z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \dots - (L_p - L_{p-1})z + L_p. \quad (3.16)$$

并假设 $\lambda > 1$ 以及 $P(\lambda) \leq 0$ 。

首先我们来证明 $\bar{P}(\lambda) \leq 0$ 。事实上,

$$P(\lambda) = \lambda^{p+1} - \frac{1}{2}\lambda^p - L_1(\lambda - 1)\lambda^{p-1} - L_2(\lambda - 1)\lambda^{p-1} - \dots - L_p(\lambda - 1) \quad (3.17)$$

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^{p+1} - \frac{1}{2}\lambda^p - \bar{L}_1(\lambda - 1)\lambda^{p-1} - \bar{L}_2(\lambda - 1)\lambda^{p-1} - \dots - \bar{L}_p(\lambda - 1) \quad (3.18)$$

并注意到 $\lambda > 1, \bar{L}_i \geq L_i, i = 1, 2, \dots, p$ , 显然可以得到 $\bar{P}(\lambda) \leq P(\lambda) \leq 0$ 。类似地, 可以证明对 $i = 1, 2, \dots, p-1$ , 有

$$\begin{aligned} \bar{K}_i &\triangleq \lambda^{i-1}(\bar{L}_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda^{i-k-1}(\bar{L}_{k+1} - \bar{L}_k) \\ &= \lambda^{i-1}(\frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{i-1} \bar{L}_k(\lambda - 1)\lambda^{i-k-1} + \bar{L}_i \\ &\geq \lambda^{i-1}(\frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{i-1} L_k(\lambda - 1)\lambda^{i-k-1} + L_i \\ &= K_i \geq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

命题成立。 □

**命题 3.5.** 对任意的 $\lambda > 1$ , 总能找到满足定理3.3条件的 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 。

证明: 对任意固定的 $\lambda > 1, P(\lambda) = \lambda^{p+1} - \frac{1}{2}\lambda^p - L_1(\lambda - 1)\lambda^{p-1} - L_2(\lambda - 1)\lambda^{p-1} - \dots - L_p(\lambda - 1)$ 关于 $L_1, L_2, \dots, L_p$ 是严格单减函数, 并且当 $L_i \rightarrow \infty$ 时,  $P(\lambda)$ 趋于 $-\infty$ , 因此对充分大的 $L_1, L_2, \dots, L_p$ , 我们有 $P(\lambda) \leq 0$ 。类似地, 对充分大的 $L_1, L_2, \dots, L_p$ , 我们有 $K_i \geq 0$ 。命题成立。 □

**注3.3.10.**

由定理3.3, 条件(\*)可以写成 $(L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{L}(\lambda)$ 的形式, 其中(此处 $l_i$ 是某一确定函数)

$$\mathcal{L}(\lambda) = \{(L_1, L_2, \dots, L_p) | L_1 \geq \lambda - \frac{1}{2}, L_2 \geq l_1(L_1), L_3 \geq l_2(L_1, L_2), \dots, L_p \geq l_{p-1}(L_1, L_2, \dots, L_{p-1})\}. \quad (3.20)$$

结合命题3.4和3.5, 很显然对充分大的 $L_1, L_2, \dots, L_p$ , 也即如果内部不确定性足够大, 则系统(3.6)对任意控制律不可稳。定理的实质即在于此。

**推论 3.6.** 定理3.3的条件(\*)可由以下任一条件替换:

$$(a) L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_p. \quad (3.21)$$

$$(b) L_i + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (3.22)$$

$$(c) L_1 \leq L_2 \leq \dots \leq L_p, \text{ 且 } L_1 + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0. \quad (3.23)$$

推论3.6的证明:

(a) 定义

$$K_p \triangleq \lambda^{p-1}(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{p-k-1}(L_{k+1} - L_k).$$

由于 $P(\lambda) \leq 0$ 和 $\lambda > 1, L_i \geq 0$ , 并注意到 $P(\lambda) = -\lambda K_p + L_p$ , 可立即得到 $K_p \geq L_p/\lambda \geq 0$ 。注意到 $K_{i+1} = \lambda K_i + (L_{i+1} - L_i), i = 1, 2, \dots, p-1$ , 且 $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_p$ , 可得 $K_{p-1} = [K_p + (L_{p-1} - L_p)]/\lambda \geq 0$ , 类似地,  $K_{p-2} \geq 0, \dots, K_1 \geq 0$ 。因此条件(\*)成立。

(b) 事实上, 如果 $L_i + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0, i = 1, 2, \dots, p$ , 则

$$K_1 = L_1 + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0,$$

$$K_2 = \lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + L_2 - L_1 \geq (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + L_2 - L_1 = L_2 + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0,$$

⋮

$$\begin{aligned} K_{p-1} &= \lambda^{p-2}(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-2} \lambda^{p-k-2}(L_{k+1} - L_k) \\ &\geq (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-2} (L_{k+1} - L_k) = L_{p-1} + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

(c) 是(b)的特殊情形。 □

**注3.3.11.**

在特殊情形  $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_p$  下, 定理3.3的条件可简写为“ $P(z) \leq 0$ 在  $z \in (1, \infty)$  中有一个解”, 它类似于[113, 定理1]中的主要条件。这表明这两个结果中可能存在某种本质联系, 表面上看这是由于两个结果的证明最后归结为讨论类似的含参动力系统, 但从系统控制的角度直接理解两个结果的相似性还有待进一步讨论。

**定理 3.7.** 假设  $\lambda \in (1, \infty)$  是以下不等式的一个解

$$P(z) = z^{p+1} - (L_1 + \frac{1}{2})z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \dots - (L_p - L_{p-1})z + L_p \leq 0. \quad (3.24)$$

并假设  $\rho > 0$  是以下不等式的一个解

$$Q(z) = z^p - K_1 z^{p-1} - K_2 z^{p-2} - \dots - K_{p-1} z - K_p \leq 0, \quad (3.25)$$

其中常数  $K_1, K_2, \dots, K_p$  定义为

$$K_1 = L_1 + \frac{1}{2} - \lambda; \quad K_{i+1} = \lambda K_i + (L_{i+1} - L_i), i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (3.26)$$

如果以下条件成立:

$$(**) \begin{cases} K'_1 & \triangleq K_1 - \rho \geq 0; \\ K'_2 & \triangleq \rho(K_1 - \rho) + K_2 \geq 0; \\ K'_3 & \triangleq \rho^2(K_1 - \rho) + \rho K_2 + K_3 \geq 0; \\ & \vdots \\ K'_{p-1} & \triangleq \rho^{p-2}(K_1 - \rho) + \sum_{k=2}^{p-1} \rho^{p-1-k} K_k \geq 0; \end{cases} \quad (3.27)$$

则存在一个无界区域  $D' \subseteq \mathcal{R}^p$ , 使得对任意的初值  $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D'$  和任意反馈律, 总存在某个  $g(\cdot) \in \mathcal{G}(L)$  使得相应的闭环系统(3.6)不稳定, 即  $\sup_{t \geq 0} |y_t| = \infty$ . [注: 区域  $D'$  将在定理证明中构造出来.]

**注3.3.12.**

条件(\*\*)与条件(\*)不同, 因为条件(\*)中要求  $K_2, K_3, \dots, K_p$  必须是非负的, 但是条件(\*\*) 没有这个要求。

**注3.3.13.**

应用定理3.7中的主要思想, 我们可以给出一些其它的与定理3.3和3.7不同的条件, 不过有些复杂, 在此不一一列举。

**注3.3.14.**

类似命题3.4和3.5的讨论对定理3.7仍成立, 因此我们不再重复。

总结以上结果, 可以看出存在一个无界区域 $\mathcal{L}$ 使得对任意控制律, 当 $(L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{L}$ 时, 系统(3.6)不能全局可稳。因此不可稳区域 $\mathcal{L}$ 描述了由多个Lipschitz常数刻画的结构不确定的系统(3.6)的反馈机制的极限。

当对 $g(\cdot)$ 有更多的先验信息时, 直观上不可稳区域 $\mathcal{L}$ 可能会缩小。作为例子我们考虑以下 $p$ 阶离散时间非线性控制系统:

$$y_{t+1} = g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1}) + u_t, \quad t \geq 0, \quad (3.28)$$

其中未知函数 $g(\cdot) \in \mathcal{G}_{sym}(L)$ 。在此我们假设对函数 $g$ 有如下先验信息: 对任意的 $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{R}^p$ , 如果知道 $g(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$ 的值则相应的 $g(x_1, x_2, \dots, x_p)$ 的值也已知。为简单起见, 我们将考虑满足条件 $g(x_1, x_2, \dots, x_p) = g(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|)$ 的函数, 即系统的不确定函数集 $\mathcal{G}(L)$ 为

$$\mathcal{G}_{sym}(L) \triangleq \{g \in \mathcal{G}(L) | g(x_1, x_2, \dots, x_p) = g(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|), \forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathcal{R}^p\} \quad (3.29)$$

对系统(3.28), 我们有如下结果:

**定理 3.8.** 对常数 $L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, \dots, L_p \geq 0$ , 如果以下差分方程的解 $\{x_n, n \geq 0\}$ 是严格单增的:

$$x_n = L_1 x_{n-1} + (L_2 - L_1)x_{n-2} + \dots + (L_p - L_{p-1})x_{n-p} - L_p x_{n-p-1} \quad (3.30)$$

其初始条件满足

$$x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = \dots = x_{-p} = 0, \quad (3.31)$$

那么系统(3.28)对任意控制律不可稳。

**定理 3.9.** 假设 $\lambda \in (1, \infty)$ 是以下不等式的解

$$P(z) = z^{p+1} - L_1 z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \dots - (L_p - L_{p-1})z + L_p \leq 0. \quad (3.32)$$



并且如果 $L_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, p)$ 和 $\lambda > 1$  满足以下条件:

$$\begin{cases} K_1 \triangleq L_1 - \lambda \geq 0; \\ K_2 \triangleq \lambda(L_1 - \lambda) + L_2 - L_1 \geq 0; \\ K_3 \triangleq \lambda^2(L_1 - \lambda) + \lambda(L_2 - L_1) + L_3 - L_2 \geq 0; \\ \vdots \\ K_{p-1} \triangleq \lambda^{p-2}(L_1 - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-2} \lambda^{p-k-2}(L_{k+1} - L_k) \geq 0; \end{cases} \quad (3.33)$$

则存在一个无界区域 $D \subseteq \mathcal{R}^p$ , 使得对任意的初值 $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D$  和任意反馈控制律, 总存在某个 $g(\cdot) \in \mathcal{G}_{sym}(L)$  使得相应的闭环系统(3.28)不稳定, 即 $\sup_{t \geq 0} |y_t| = \infty$ .

**定理 3.10.** 假设 $\lambda \in (1, \infty)$  是以下不等式的解

$$P(z) = z^{p+1} - L_1 z^p - (L_2 - L_1) z^{p-1} - \dots - (L_p - L_{p-1}) z + L_p \leq 0. \quad (3.34)$$

并假设 $\rho > 0$ 是以下不等式的解

$$Q(z) = z^p - K_1 z^{p-1} - K_2 z^{p-2} - \dots - K_{p-1} z - K_p \leq 0, \quad (3.35)$$

其中常数 $K_1, K_2, \dots, K_p$  定义如下:

$$K_1 = L_1 - \lambda; \quad K_{i+1} = \lambda K_i + (L_{i+1} - L_i), i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (3.36)$$

如果以下条件成立

$$\begin{cases} K'_1 \triangleq K_1 - \rho \geq 0; \\ K'_2 \triangleq \rho(K_1 - \rho) + K_2 \geq 0; \\ K'_3 \triangleq \rho^2(K_1 - \rho) + \rho K_2 + K_3 \geq 0; \\ \vdots \\ K'_{p-1} \triangleq \rho^{p-2}(K_1 - \rho) + \sum_{k=2}^{p-1} \rho^{p-1-k} K_k \geq 0; \end{cases} \quad (3.37)$$

则存在一个无界区域 $D' \subseteq \mathcal{R}^p$ , 使得对任意的初值 $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D'$  和任意反馈控制律, 总存在某个 $g(\cdot) \in \mathcal{G}_{sym}(L)$  使得相应的闭环系统(3.28)不稳定, 即 $\sup_{t \geq 0} |y_t| = \infty$ .

**注3.3.15.**

以上结果(定理3.8、定理3.9、定理3.10)分别与定理3.1, 定理3.3和定理3.7类似, 其证明也类似。系统(3.6)和(3.28)的不同在于可利用的已知信息, 这些在证明细节里有所体现。因此我们将重点放在对系统(3.6)相应结果的证明上, 而对系统(3.28)相应结果的证明我们只指出不同点。

**3.3.2 反面—定理证明**

在这一部分中, 首先我们将给出定理3.3的证明, 然后基于该证明的思想给出其它定理的证明。对系统(3.6), 从数学上来说, 定理3.1是最漂亮的结果(但难以验证), 我们将在下一小节对这些结果作进一步的讨论。

**3.3.2.1 定理3.3的证明**

首先, 引入一些文献[113], [121]中的记号。记 $Y_0 = (y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1})$ 为初始值,  $y_i$ 是第 $i$ 步的输出。定义

$$\bar{b}_t \triangleq \max_{-p+1 \leq i \leq t} y_i, \quad \underline{b}_t \triangleq \min_{-p+1 \leq i \leq t} y_i \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} B_t &\triangleq [\underline{b}_t, \bar{b}_t], \Delta B_t = B_t \setminus B_{t-1}, \quad \text{对 } t > -p+1 \\ \Delta B_t &\triangleq B_t = \{0\}, \quad \text{对 } t \leq -p+1 \end{aligned} \quad (3.39)$$

且

$$|B_t| \triangleq \bar{b}_t - \underline{b}_t, \quad t \geq -p+1 \quad \text{与} \quad |\Delta B_t| \triangleq |B_t| - |B_{t-1}|, \quad t \geq -p+2 \quad (3.40)$$

显然, 由以上定义, 可得

$$\begin{aligned} \bar{b}_t &\geq \bar{b}_{t-1}, \quad \underline{b}_t \leq \underline{b}_{t-1} \\ (\bar{b}_t - \bar{b}_{t-1})(\underline{b}_t - \underline{b}_{t-1}) &= 0 \end{aligned}$$

且 $B_t \subseteq B_{t+1}$ 对所有 $t \geq -p+1$ 和

$$B_t = \bigcup_{i=-p+1}^t \Delta B_i, \quad \Delta B_i \cap \Delta B_j = \emptyset, \quad (i \neq j) \quad (3.41)$$

对任意点 $a \in \mathcal{R}^1$ , 和任意集合 $B \subseteq \mathcal{R}^1$ , 定义以下距离函数:

$$d(a, B) \triangleq \inf_{b \in B} |a - b| \quad (3.42)$$

显然

$$|\Delta B_t| = d(y_t, B_{t-1}), \quad (t \geq -p + 2) \quad (3.43)$$

根据以上的一些记号, 我们根据初始条件的值来构造区域 $D$ :

$$D \triangleq \left\{ Y_0 \in \mathcal{R}^p \left| \begin{array}{l} |B_{-p+2}| = |\Delta B_{-p+2}| > 0; \\ |\Delta B_{-p+3}| \geq (L_1 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+2}|; \\ |\Delta B_{-p+4}| \geq (L_1 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+3}| + (L_2 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+2}|; \\ \vdots \\ |\Delta B_0| \geq (L_1 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-1}| + \cdots + (L_{p-2} - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+2}|. \end{array} \right. \right\} \quad (3.44)$$

根据 $D$ 的定义, 容易看出 $D$ 非空并且无界。

现在我们将引进一个 $\mathcal{R}^1$ 上的函数类。对给定的 $L_i$ , 记:

$$\mathcal{F}(L_i) \triangleq \{f: \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^1 \mid |f(x_1) - f(x_2)| \leq L_i|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}^1\} \quad (3.45)$$

从(3.7)可清楚看出: 如果 $f_i \in \mathcal{F}(L_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ 且

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_p(x_p)$$

那么 $g \in \mathcal{G}(L)$ 。下面我们将对任意 $Y_0 \in D$ 和任意的反馈律 $u_t = h_t(y_i, i \leq t)$ 构造 $f_i \in \mathcal{F}(L_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , 使得闭环系统

$$y_{t+1} = f_1(y_t) + f_2(y_{t-1}) + \cdots + f_p(y_{t-p+1}) + u_t \quad (t \geq 0)$$

不稳定。

下面以一个引理来开始我们的证明。

**引理 3.11.** 记 $r_n \triangleq |B_n| - \lambda|B_{n-1}|, \lambda > 1$ 。对任意的 $Y_0 = (y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D$ , 其中 $D$ 按(3.44)中定义,

(i) 如果条件 $(\star)$ 满足, 即 $K_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, p$ , 那么

$$r_{-p+2} \geq 0, r_{-p+1} \geq 0, \dots, r_0 \geq 0; \quad (3.46)$$

(ii) 如果条件 $(\star)$ 满足并且

$$|\Delta B_1| \geq L_1|\Delta B_0| + L_2|\Delta B_{-1}| + \cdots + L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| - \frac{1}{2}|B_0|, \quad (3.47)$$

则  $r_1 \geq 0$ ;

(iii) 进而, 如果  $P(\lambda) \leq 0$ , 且对  $1 \leq k \leq m$

$$|\Delta B_{k+1}| \geq L_1 |\Delta B_k| + L_2 |\Delta B_{k-1}| + \cdots + L_p |\Delta B_{k-p+1}| - \frac{1}{2} |B_k|, \quad (3.48)$$

则当  $0 \leq k \leq m$  时,  $r_{k+1} \geq 0$ 。

引理 3.11 的证明: (i) 显然有

$$r_{-p+2} = |B_{-p+2}| - \lambda |B_{-p+1}| = |B_{-p+2}| = |\Delta B_{-p+2}| \geq 0;$$

因为  $|\Delta B_{-p+3}| \geq (L_1 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+2}|$ , 所以有

$$\begin{aligned} r_{-p+3} &= |B_{-p+3}| - \lambda |B_{-p+2}| = |\Delta B_{-p+3}| + (1 - \lambda) |B_{-p+2}| \\ &\geq (L_1 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+2}| + (1 - \lambda) |B_{-p+2}| \\ &= (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) |\Delta B_{-p+2}| \\ &= K_1 |\Delta B_{-p+2}| \geq 0; \end{aligned} \quad (3.49)$$

从而  $|\Delta B_{-p+3}| \geq (\lambda - 1) |\Delta B_{-p+2}|$ , 且由于

$$|\Delta B_{-p+4}| \geq (L_1 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+3}| + (L_2 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+2}|,$$

我们可得

$$\begin{aligned} r_{-p+4} &= |B_{-p+4}| - \lambda |B_{-p+3}| = |\Delta B_{-p+4}| + (1 - \lambda) (|\Delta B_{-p+2}| + |\Delta B_{-p+3}|) \\ &\geq (L_1 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+3}| + (L_2 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+2}| \\ &\quad + (1 - \lambda) (|\Delta B_{-p+2}| + (\lambda - 1) |\Delta B_{-p+2}|) \\ &\geq (L_1 - \frac{1}{2}) (\lambda - 1) |\Delta B_{-p+2}| + (L_2 - \frac{1}{2}) |\Delta B_{-p+2}| + (1 - \lambda) \lambda |\Delta B_{-p+2}| \\ &= [\lambda (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + L_2 - L_1] |\Delta B_{-p+2}| \\ &= K_2 |\Delta B_{-p+2}| \geq 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

现在用归纳法来证明(3.46)。假设对所有的  $i \leq k < p$  有  $r_{-p+i} \geq K_{i-2} |\Delta B_{-p+2}| \geq 0$  成立。则由  $Y_0 \in D$ ,  $D$  的定义和等式  $|B_t| = \sum_{i=-p+1}^t |\Delta B_i|$  可得

$$|\Delta B_{-p+k+1}| \geq (L_1 - \frac{1}{2}) |B_{-p+k}| + (L_2 - L_1) |B_{-p+k-1}| + \cdots + (L_{k-1} - L_{k-2}) |B_{-p+2}|.$$

因此

$$\begin{aligned}
r_{-p+k+1} &= |B_{-p+k+1}| - \lambda|B_{-p+k+1}| = |\Delta B_{-p+k+1}| + (1-\lambda)|B_{-p+k}| \\
&\geq (L_1 - \frac{1}{2})|B_{-p+k}| + (L_2 - L_1)|B_{-p+k-1}| + \cdots + (L_{k-1} - L_{k-2})|B_{-p+2}| \\
&\quad + (1-\lambda)|B_{-p+k}| \\
&= (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda)|B_{-p+k}| + (L_2 - L_1)|B_{-p+k-1}| + \cdots + (L_{k-1} - L_{k-2})|B_{-p+2}| \\
&= (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda)r_{-p+k} + [\lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (L_2 - L_1)]|B_{-p+k-1}| \\
&\quad + (L_3 - L_2)|B_{-p+k-2}| + \cdots + (L_{k-1} - L_{k-2})|B_{-p+2}| \\
&= (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda)r_{-p+k} + [\lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (L_2 - L_1)]|B_{-p+k-1}| \\
&\quad + [\lambda^2(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \lambda(L_2 - L_1) + (L_3 - L_2)]|B_{-p+k-2}| \\
&\quad + \cdots + (L_{k-1} - L_{k-2})|B_{-p+2}| \\
&= \cdots \cdots \quad [\text{反复应用}|B_n| = r_n + |B_{n-1}|] \\
&= (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda)r_{-p+k} + [\lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (L_2 - L_1)]r_{-p+k-1} \\
&\quad + [\lambda^2(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \lambda(L_2 - L_1) + (L_3 - L_2)]r_{-p+k-2} + \cdots \\
&\quad + [\lambda^{k-2}(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \lambda^{k-3}(L_2 - L_1) + \cdots + \lambda(L_k - L_{k-1}) + (L_{k-1} - L_{k-2})]r_{-p+2} \\
&= K_1 r_{-p+k} + K_2 r_{-p+k-1} + \cdots + K_{k-1} r_{-p+2} \\
&\geq K_{k-1} r_{-p+2} \geq 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.46)证毕。

(ii) 与(i)的证明类似, 由已知条件可推出

$$r_1 \geq K_1 r_0 + K_2 r_{-1} + \cdots + K_{p-1} r_{-p+2}, \tag{3.52}$$

且由(i)的结果知 $r_{-p+2} \geq 0, r_{-p+1} \geq 0, \cdots, r_0 \geq 0$ , 则显然 $r_1 \geq 0$ 。

(iii) 由于我们已经证得(i) 和(ii)结论成立, 因此只需证: 对所有的 $k \leq n$ 如果 $r_k \geq 0$ 满足,  $r_{n+1} \geq 0$ 成立即可。事实上, 对 $k = n+1, n, \cdots, n-p+1$ , 反复把 $|B_k| = r_k + \lambda|B_{k-1}|$  代入(3.48), 可得

$$\begin{aligned}
r_{n+1} &\geq (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda)r_n \\
&\quad + [\lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + L_2 - L_1]r_{n-1} \\
&\quad + [\lambda^2(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \lambda(L_2 - L_1) + L_3 - L_2]r_{n-2} \\
&\quad + \quad \vdots \\
&\quad + [\lambda^{p-1}(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{p-k-1}(L_{k+1} - L_k)]r_{n-p+1} \\
&\quad + [\lambda^p(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^{p-k}(L_{k+1} - L_k) - L_p]|B_{n-p}|
\end{aligned} \tag{3.53}$$

注意到最后一项正是 $-P(\lambda)|B_{n-p}|$ , 由假设 $P(\lambda) \leq 0$ 知此项不小于0。因此可得

$$r_{n+1} \geq K_1 r_n + K_2 r_{n-1} + \cdots + K_p r_{n-p+1} \quad (3.54)$$

其中 $K_1, K_2, \cdots, K_p$  在定理3.3中定义。从而对 $n-p+1 \leq k \leq n$ , 如果 $r_k \geq 0$ , 则 $r_{n+1} \geq 0$ 成立。  $\square$

**定理3.3的证明:** 我们把证明过程分为四部分。

**第1步.** 对任意的 $Y_0 = (y_0, y_{-1}, \cdots, y_{-p+1}) \in D$ , 首先来证明在条件 $(\star)$ 下,  $Y_0$ 的各个分量互不相同。事实上, 由(3.41), 可得

$$|B_t| = \sum_{i=-p+1}^t |\Delta B_i|$$

由于 $Y_0 \in D$ , 再由 $D$ 的定义和以上等式, 可得对 $i = 3, 4, \cdots, p$ 有

$$|\Delta B_{-p+i}| \geq (L_1 - \frac{1}{2})|B_{-p+i-1}| + (L_2 - L_1)|B_{-p+i-2}| + \cdots + (L_{i-2} - L_{i-3})|B_{-p+2}| \quad (3.55)$$

且

$$|\Delta B_{-p+2}| > 0. \quad (3.56)$$

注意到 $\lambda > 1$  和条件 $(\star)$ , 有

$$\begin{aligned} |\Delta B_{-p+3}| &\geq (L_1 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+2}| \\ &= [(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| \\ &= [K_1 + (\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| > 0; \end{aligned} \quad (3.57)$$

从而由 $L_1 - \frac{1}{2} \geq \lambda - 1$ , 可得

$$\begin{aligned} |\Delta B_{-p+4}| &\geq (L_1 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+3}| + (L_2 - \frac{1}{2})|\Delta B_{-p+2}| \\ &\geq (\lambda - 1)[(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| \\ &\quad + [(L_2 - L_1) + (L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| \\ &= [\lambda(L_1 + \frac{1}{2} - \lambda) + (L_2 - L_1) + \lambda(\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| \\ &= [K_2 + \lambda(\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| > 0; \end{aligned} \quad (3.58)$$

进而, 可以证明

$$|\Delta B_{-p+i}| \geq [K_{i-2} + \lambda^{i-3}(\lambda - 1)]|\Delta B_{-p+2}| > 0 \quad \text{对 } i = 3, 4, \cdots, p. \quad (3.59)$$

事实上, 由引理3.11 (i), 可知

$$|B_{-p+3}| \geq \lambda|B_{-p+2}|, |B_{-p+4}| \geq \lambda|B_{-p+3}|, \dots, |B_0| \geq \lambda|B_{-1}|. \quad (3.60)$$

从而 $|B_{-p+k}| \geq \lambda^{k-2}|B_{-p+2}|$  ( $k = 3, 4, \dots, p$ ), 因此对 $i = 3, 4, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} |\Delta B_{-p+i}| &\geq (L_1 - \frac{1}{2})|B_{-p+i-1}| + (L_2 - L_1)|B_{-p+i-2}| + \dots + (L_{i-2} - L_{i-3})|B_{-p+2}| \\ &\geq [(L_1 - \frac{1}{2})\lambda^{i-3} + (L_2 - L_1)\lambda^{i-4} + \dots + (L_{i-2} - L_{i-3})]|B_{-p+2}| \\ &= [K_{i-2} + \lambda^{i-3}(\lambda - 1)]|B_{-p+2}| > 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

这样我们就证明了 $|\Delta B_{-p+i}| > 0$ , 即  $y_{-p+i} \notin B_{-p+i-1}$ ,  $i = 3, 4, \dots, p$ , 且 $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}$  在条件(\*)下不同. 因此我们可以取任意(固定)常数 $a_{ij} \in \mathcal{R}^1$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ;  $j = -i, -i-1, \dots, -p+1$ , 使得

$$|a_{ij} - a_{ik}| \leq L_i|y_j - y_k|, \forall k < j \quad (3.62)$$

且选取 $f_i(y_j)$  为 $a_{ij}$ , 即

$$\begin{aligned} f_i(y_j) &= a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, p-1; \quad j = -i, -i-1, \dots, -p+1; \\ f_p(y_{-p+1}) &= a_{p, -p+1}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

定义

$$\mathcal{F}_{-1} \triangleq \{(f_1, f_2, \dots, f_p) \mid f_i \in \mathcal{F}(L_i), \quad i = 1, 2, \dots, p, \text{ 也满足 (3.63)}\}. \quad (3.64)$$

显然,  $\mathcal{F}_{-1} \neq \emptyset$ , 其中 $\emptyset$  为空集.

定义

$$b_{-p+i-1} \triangleq \begin{cases} \bar{b}_{-p+i-1}, & \text{如果 } y_{-p+i} > \bar{b}_{-p+i-1} \\ \underline{b}_{-p+i-1}, & \text{如果 } y_{-p+i} < \bar{b}_{-p+i-1} \end{cases} \quad (3.65)$$

由(3.64), 可以看出对任意 $(f_1, f_2, \dots, f_p) \in \mathcal{F}_{-1}$ ,  $f_i(b_{-i}), i = 1, 2, \dots, p-1$  都是常数. 这是因为 $f_i \in \mathcal{F}(L_i)$ ,  $f_i(y_{-i+1})$  可以为以下区间的任意值:

$$[f_i(b_{-i}) - L_i|\Delta B_{-i+1}|, f_i(b_{-i}) + L_i|\Delta B_{-i+1}|], \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

**第2步.** 接下来定义

$$\mathcal{F}'_0 \triangleq \left\{ \left( \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{array} \right) \in \mathcal{F}_{-1} \left| \begin{array}{l} f_1(y_0) = f_1(b_{-1}) + L_1|\Delta B_0| \\ f_2(y_{-1}) = f_2(b_{-2}) + L_2|\Delta B_{-1}| \\ \vdots \\ f_{p-1}(y_{-p+2}) = f_{p-1}(b_{-p+1}) + L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| \end{array} \right. \right\} \quad (3.66)$$

$$\mathcal{F}''_0 \triangleq \left\{ \left( \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{array} \right) \in \mathcal{F}_{-1} \left| \begin{array}{l} f_1(y_0) = f_1(b_{-1}) - L_1|\Delta B_0| \\ f_2(y_{-1}) = f_2(b_{-2}) - L_2|\Delta B_{-1}| \\ \vdots \\ f_{p-1}(y_{-p+2}) = f_{p-1}(b_{-p+1}) - L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| \end{array} \right. \right\} \quad (3.67)$$

和任意的  $u_0 = h_0(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in \mathcal{R}^1$ ,  $w_1 \in \mathcal{R}^1$ , 则

$$\begin{aligned} & |(f'_1(y_0) + f'_2(y_{-1}) + \dots + f'_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0) - (f''_1(y_0) + f''_2(y_{-1}) + \dots + f''_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0)| \\ & = 2L_1|\Delta B_0| + 2L_2|\Delta B_{-1}| + \dots + 2L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| \end{aligned} \quad (3.68)$$

由此, 显然可得

$$\begin{aligned} & \max \left\{ d(f'_1(y_0) + f'_2(y_{-1}) + \dots + f'_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0, \frac{b_0 + \bar{b}_0}{2}), \right. \\ & \quad \left. d(f''_1(y_0) + f''_2(y_{-1}) + \dots + f''_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0, \frac{b_0 + \bar{b}_0}{2}) \right\} \\ & \geq L_1|\Delta B_0| + L_2|\Delta B_{-1}| + \dots + L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}|. \end{aligned} \quad (3.69)$$

且

$$\begin{aligned} & \max \left\{ d(f'_1(y_0) + f'_2(y_{-1}) + \dots + f'_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0, B_0), \right. \\ & \quad \left. d(f''_1(y_0) + f''_2(y_{-1}) + \dots + f''_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0, B_0) \right\} \\ & \geq L_1|\Delta B_0| + L_2|\Delta B_{-1}| + \dots + L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| - \frac{1}{2}|B_0|. \end{aligned} \quad (3.70)$$

现在定义

$$\mathcal{F}_0 \triangleq \begin{cases} \mathcal{F}'_0, & \text{如果 } d(f'_1(y_0) + f'_2(y_{-1}) + \dots + f'_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0, B_0) \\ & \geq L_1|\Delta B_0| + L_2|\Delta B_{-1}| + \dots + L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| - \frac{1}{2}|B_0|, \\ \mathcal{F}''_0, & \text{否则.} \end{cases} \quad (3.71)$$



显然,  $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$ , 且对所有  $(f_1, f_2, \dots, f_p) \in \mathcal{F}_0$ ,  $y_1, f_1(y_0), \dots, f_p(y_{-p+1})$  都是常数。且

$$\begin{aligned} |\Delta B_1| &= d(y_1, B_0) = d(f_1(y_0) + f_2(y_{-1}) + \dots + f_{p-1}(y_{-p+2}) + u_0, B_0) \\ &\geq L_1|\Delta B_0| + L_2|\Delta B_{-1}| + \dots + L_{p-1}|\Delta B_{-p+2}| - \frac{1}{2}|B_0|. \end{aligned} \quad (3.72)$$

由引理3.11 (ii),  $|B_1| \geq \lambda|B_0|$ , 从而

$$|\Delta B_1| = |B_1| - |B_0| \geq (\lambda - 1)|B_0| > 0. \quad (3.73)$$

所以  $y_1 \notin B_0 = [b_0, \bar{b}_0]$ , 记

$$b_0 \triangleq \begin{cases} \bar{b}_0, & \text{如果 } y_1 > \bar{b}_0 \\ b_0, & \text{如果 } y_1 < b_0 \end{cases} \quad (3.74)$$

由以上我们可以看出对所有的  $(f_1, f_2, \dots, f_p) \in \mathcal{F}_0$ ,  $f_1(b_0), f_2(b_{-1}), \dots, f_p(b_{-p+1})$  都是常数。

**第3步.** 假设  $\{y_j, f_1(y_{j-1}), f_2(y_{j-2}), \dots, f_p(y_{j-p}), j \leq k, k \geq 1\}$  已经确定, 则  $f_i(b_{j-i}), i = 1, 2, \dots, p$  对所有的  $(f_1, f_2, \dots, f_p) \in \mathcal{F}_{k-1}$  都为常数。现在定义

$$\mathcal{F}'_k \triangleq \left\{ \left( \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{array} \right) \in \mathcal{F}_{k-1} \left| \begin{array}{l} f_1(y_k) = f_1(b_{k-1}) + L_1|\Delta B_k| \\ f_2(y_{k-1}) = f_2(b_{k-2}) + L_2|\Delta B_{k-1}| \\ \vdots \\ f_p(y_{k-p+1}) = f_p(b_{k-p}) + L_p|\Delta B_{k-p+1}| \end{array} \right. \right\} \quad (3.75)$$

$$\mathcal{F}''_k \triangleq \left\{ \left( \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_p \end{array} \right) \in \mathcal{F}_{k-1} \left| \begin{array}{l} f_1(y_k) = f_1(b_{k-1}) - L_1|\Delta B_k| \\ f_2(y_{k-1}) = f_2(b_{k-2}) - L_2|\Delta B_{k-1}| \\ \vdots \\ f_p(y_{k-p+1}) = f_p(b_{k-p}) - L_p|\Delta B_{k-p+1}| \end{array} \right. \right\} \quad (3.76)$$

则与第2步类似, 对任意  $(f'_1, f'_2, \dots, f'_p) \in \mathcal{F}'_k, (f''_1, f''_2, \dots, f''_p) \in \mathcal{F}''_k$ , 可得

$$\begin{aligned} &\max\{ d(f'_1(y_k) + f'_2(y_{k-1}) + \dots + f'_p(y_{k-p+1}) + u_k, B_k), \\ &\quad d(f''_1(y_k) + f''_2(y_{k-1}) + \dots + f''_p(y_{k-p+1}) + u_k, B_k) \} \\ &\geq L_1|\Delta B_k| + L_2|\Delta B_{k-1}| + \dots + L_p|\Delta B_{k-p+1}| - \frac{1}{2}|B_k|. \end{aligned} \quad (3.77)$$

定义

$$\mathcal{F}_k \triangleq \begin{cases} \mathcal{F}'_k, & \text{如果 } d(f'_1(y_k) + f'_2(y_{k-1}) + \cdots + f'_p(y_{k-p+1}) + u_k, B_k) \\ & \geq L_1|\Delta B_k| + L_2|\Delta B_{k-1}| + \cdots + L_p|\Delta B_{k-p+1}| - \frac{1}{2}|B_k|. \\ \mathcal{F}''_k, & \text{否则} \end{cases} \quad (3.78)$$

则对任意的  $(f_1, f_2, \cdots, f_p) \in \mathcal{F}_k$ ,  $y_{k+1}, f_1(y_k), f_2(y_{k-1}), \cdots, f_p(y_{k-p+1})$  是确定的, 且

$$\begin{aligned} |\Delta B_{k+1}| &= d(y_{k+1}, B_k) = d(f_1(y_k) + f_2(y_{k-1}) + \cdots + f_p(y_{k-p+1}) + u_k, B_k) \\ &\geq L_1|\Delta B_k| + L_2|\Delta B_{k-1}| + \cdots + L_p|\Delta B_{k-p+1}| - \frac{1}{2}|B_k|. \end{aligned} \quad (3.79)$$

由引理3.11 (iii),  $|B_{k+1}| \geq \lambda|B_k|$ , 从而,  $|\Delta B_{k+1}| \geq (\lambda - 1)|B_k| > 0$ , 因此  $y_{k+1} \notin B_k$ . 定义

$$b_k \triangleq \begin{cases} \bar{b}_k, & \text{if } y_{k+1} > \bar{b}_k \\ \underline{b}_k, & \text{if } y_{k+1} < \underline{b}_k \end{cases} \quad (3.80)$$

**第4步.** 由引理3.11 (iii),  $r_n \geq 0, \forall n > 0$ . 则对所有的  $n > 0$ ,  $|B_n| \geq \lambda|B_{n-1}|$ , 且由于  $\lambda > 1, |B_{-p+2}| > 0$ , 可得  $|B_n| = \lambda^{n+p-2}|B_{-p+2}| \rightarrow \infty$  当  $n \rightarrow \infty$ . 因此由  $|B_k|$  的定义可知  $\limsup_{t \rightarrow \infty} |y_t| = \infty$ .

对任意  $k \geq -p + 1$ , 注意到  $y_{k+1} \notin B_k$ ,  $(f_1^k(y_k), f_2^k(y_{k-1}), \cdots, f_p^k(y_{k-p+1}))$  以及  $(f_1^k, f_2^k, \cdots, f_p^k) \in \mathcal{F}_k$  是独立的, 因此可以定义

$$\mathcal{F}_\infty \triangleq \{(f_1, \cdots, f_p)^\tau \in \mathcal{F}_{-1} | f_i(y_{k-i+1}) = f_i^k(y_{k-i+1}), (f_1^k, f_2^k, \cdots, f_p^k)^\tau \in \mathcal{F}_k, k \geq 0\}. \quad (3.81)$$

记

$$\bar{b}_\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{b}_k, \quad \underline{b}_\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{b}_k, \quad (3.82)$$

从  $|B_n| = \lambda^{n+p-2}|B_{-p+2}| \rightarrow \infty$ , 可知存在三种可能情形:

情形1:  $\underline{b}_\infty = -\infty, \bar{b}_\infty < \infty$ .

首先, 如果存在  $l > 0$  使得  $y_l = \bar{b}_\infty$ , 那么可记  $\bar{x}_i^\infty \triangleq f_i^{l+i-1}(y_l)$ , 其值在  $\mathcal{F}_{l+i-1}$  或  $\mathcal{F}_{-1}$  中给出.

否则必存在  $\{y_j\}$  的子列  $\{y_{j_k}\}$  使得

$$|\Delta B_{j_k+1}| = y_{j_k+1} - y_{j_k}, \quad \text{且} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_{j_k} = \bar{b}_\infty. \quad (3.83)$$

因此 $\{y_{j_k}\}$ 为一Cauchy序列。又对任意 $m > n$

$$|f_i^{j_m+i-1}(y_{j_m}) - f_i^{j_n+i-1}(y_{j_n})| = |f_i^{j_m+i-1}(y_{j_m}) - f_i^{j_m+i-1}(y_{j_n})| \leq L_i |y_{j_m} - y_{j_n}|, \quad (3.84)$$

其中 $f_i^{j_k+i-1}(y_{j_k})$ 的值在 $\mathcal{F}_{j_k+i-1}$ 中给出, 因此序列 $\{f_i^{j_k+i-1}(y_{j_k})\}$ 也是一Cauchy序列。记

$$\bar{x}_i^\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{j_k+i-1}(y_{j_k}), \quad (3.85)$$

现在我们可以定义( $i = 1, 2, \dots, p$ ),

$$f_i^\infty(x) \triangleq \begin{cases} (y_k, f_i^{k+i-1}(y_k)) \text{的线性插值,} & \text{对 } x < \bar{b}_\infty \\ \bar{x}_i^\infty & \text{否则} \end{cases} \quad (3.86)$$

情形2:  $\underline{b}_\infty > -\infty, \bar{b}_\infty = \infty$ . 与情形1类似, 我们可以定义 $\underline{x}_i^\infty$ 和

$$f_i^\infty(x) \triangleq \begin{cases} (y_k, f_i^{k+i-1}(y_k)) \text{的线性插值,} & \text{对 } x > \underline{b}_\infty \\ \underline{x}_i^\infty & \text{否则} \end{cases} \quad (3.87)$$

情形3:  $\underline{b}_\infty = -\infty, \bar{b}_\infty = \infty$ . 定义

$$f_i^\infty(x) \triangleq (y_k, f_i^{k+i-1}(y_k)) \text{的线性插值} \quad (3.88)$$

显然, 不管哪一种情形, 都有 $(f_1^\infty, f_2^\infty, \dots, f_p^\infty) \in \mathcal{F}_\infty$ . 因此,  $\mathcal{F}_\infty \neq \emptyset$ . 对任意的 $(f_1^\infty, f_2^\infty, \dots, f_p^\infty) \in \mathcal{F}_\infty$ , 定义

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) \triangleq f_1^\infty(x_1) + f_2^\infty(x_2) + \dots + f_p^\infty(x_p), \quad (3.89)$$

则 $g \in \mathcal{G}(L)$ . 从而确实存在某个 $g \in \mathcal{G}(L)$ 使得以下闭环系统

$$y_{t+1} = g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1}) + u_t \quad (3.90)$$

不稳定。定理3.3证毕。  $\square$

### 3.3.2.2 定理3.7的证明

其证明与定理3.3类似, 因此我们只需指出两者不同即可。主要思想仍是证明: 对任意的 $n > 0$ ,  $r_n = |B_n| - \lambda|B_{n-1}| \geq 0$ 成立。关于 $r_n$ 的不等式仍为

$$r_{n+1} \geq K_1 r_n + K_2 r_{n-1} + \dots + K_p r_{n-p+1}, \quad (3.91)$$

我们要证如果  $s_{-p+2} \geq 0, s_{-p+1} \geq 0, \dots, s_0 \geq 0$ , 则在条件(★★)下有  $r_n \geq 0$  成立。这里  $s_k = r_k - \rho r_{k-1}$ , 且  $\rho > 0$  为以下不等式的解

$$Q(z) = z^p - K_1 z^{p-1} - K_2 z^{p-2} - \dots - K_{p-1} z - K_p \leq 0.$$

把  $r_k = s_k + \rho r_{k-1}$  反复代入(3.91), 可得

$$\begin{aligned} s_{n+1} &\geq (K_1 - \rho)s_n + [\rho(K_1 - \rho) + K_2]s_{n-1} \\ &\quad + [\rho^2(K_1 - \rho) + \rho K_2 + K_3]s_{n-2} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + [\rho^{p-2}(K_1 - \rho) + \sum_{k=2}^{p-1} \rho^{p-1-k} K_k]s_{n-p+2} \\ &\quad + [\rho^{p-1}(K_1 - \rho) + \sum_{k=2}^p \rho^{p-k} K_k]r_{n-p+1} \end{aligned} \quad (3.92)$$

注意到以上不等式中右边最后一项正是  $-Q(\rho)r_{n-p+1}$ , 由假设知其系数  $-Q(\rho) \geq 0$ . 因此我们可得

$$s_{n+1} \geq K'_1 s_n + K'_2 s_{n-1} + \dots + K'_{p-1} s_{n-p+2} - Q(\rho)r_{n-p+1} \quad (3.93)$$

其中  $K'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p-1$ ) 在定理3.7中定义。条件(★★)指  $K'_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p-1$ ), 因此如果  $r_{-p+1} \geq 0, s_{-p+2} = r_{-p+2} - \rho r_{-p+1} \geq 0, \dots, s_0 = r_0 - \rho r_{-1} \geq 0$ , 可得  $r_{-p+3} \geq \rho r_{-p+2} \geq 0, \dots, r_0 \geq \rho r_{-1} \geq 0$ , 从而由(3.93), 显然对所有的  $n > 0$ , 有  $s_n = r_n - \rho r_{n-1} \geq 0$  和  $r_n \geq \rho r_{n-1} \geq \dots \geq \rho^{n+p-2} \cdot r_{-p+2} \geq 0$  成立。

现在我们来证明确实存在一个无界区域  $D'$  使得

$$s_{-p+2} \geq 0, s_{-p+1} \geq 0, \dots, s_0 \geq 0 \quad (3.94)$$

对所有的初值  $(y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D'$  都成立。事实上, 我们可以按以下方式构造区域  $D'$ :

$$D' \triangleq \left\{ Y_0 \in \mathcal{R}^p \left| \begin{array}{l} |B_{-p+2}| = |\Delta B_{-p+2}| > 0; \\ |\Delta B_{-p+3}| \geq (\rho + \lambda - 1)|\Delta B_{-p+2}|; \\ |\Delta B_{-p+4}| \geq (\rho + \lambda - 1)|\Delta B_{-p+3}| + (\rho + \lambda - 1 - \rho\lambda)|\Delta B_{-p+2}|; \\ \vdots \\ |\Delta B_0| \geq (\rho + \lambda - 1)|\Delta B_{-1}| + (\rho + \lambda - 1 - \rho\lambda)\{|\Delta B_{-2}| + \dots + |\Delta B_{-p+2}|\}. \end{array} \right. \right\} \quad (3.95)$$

显然 $D'$ 是非空和无界的。对任意的 $Y_0 = (y_0, y_{-1}, \dots, y_{-p+1}) \in D'$ , 由于 $Y_0 \in D'$ , 可以看出 $s_{-p+2} = r_{-p+2} = |B_{-p+2}| > 0$ 。由 $s_k$ 的定义, 即

$$\begin{aligned} s_k &= r_k - \rho r_{k-1} = (|B_k| - \lambda|B_{k-1}|) - \rho(|B_{k-1}| - \lambda|B_{k-2}|) \\ &= |\Delta B_k| + |B_{k-1}| - (\rho + \lambda)|B_{k-1}| + \rho\lambda|B_{k-2}| \\ &= |\Delta B_k| - (\rho + \lambda - 1)|\Delta B_{k-1}| - (\rho + \lambda - 1 - \rho\lambda)|B_{k-2}| \end{aligned} \quad (3.96)$$

我们可以很容易证明如果 $Y_0 \in D'$ , 则

$$s_{-p+1} \geq 0, s_{-p} \geq 0, \dots, s_0 \geq 0. \quad (3.97)$$

这样与定理3.3类似, 可以完成定理3.7的证明。□

### 3.3.2.3 定理3.9和定理3.10的证明

我们采用[116, 定理2.4]证明的一些思想来证明这两个定理。在此只需证明在定理3.9或定理3.10的条件下, 对任意反馈律 $\{u_t\}$ , 总存在某个 $g \in \mathcal{G}_{sym}(L)$ 使得相应的闭环系统(3.28)不可稳。

为了找到这样的 $g \in \mathcal{G}_{sym}(L)$  (依赖于 $\{u_t\}$ ), 我们的方法是构造一个非增的非空的序列集合 $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_{sym}(L), t = 0, 1, 2, \dots$  (依赖于 $\{u_t\}$ ) 使得对任意的 $f \in \mathcal{F}_t, \{|y_t|, 0 \leq i \leq t+1\}$  严格单增。这种构造技巧与定理3.3或定理3.7证明中的技巧类似, 因此我们仅需指出两者间差别。

首先我们定义区域 $D$ 为

$$D \triangleq \left\{ Y_0 \in \mathcal{R}^p \left| \begin{array}{l} |B_{-p+2}| = |\Delta B_{-p+2}| > 0; \\ |\Delta B_{-p+3}| \geq L_1 |\Delta B_{-p+2}|; \\ |\Delta B_{-p+4}| \geq L_1 |\Delta B_{-p+3}| + L_2 |\Delta B_{-p+2}|; \\ \vdots \\ |\Delta B_0| \geq L_1 |\Delta B_{-1}| + L_2 |\Delta B_{-2}| + \dots + L_{p-2} |\Delta B_{-p+2}|. \end{array} \right. \right\} \quad (3.98)$$

并定义多项式 $P(z)$ 为

$$P(z) = z^{p+1} - (L_1 + 1)z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \dots - (L_p - L_{p-1})z + L_p. \quad (3.99)$$

我们采用以下不等式代替不等式(3.79),

$$\begin{aligned} |\Delta B_{k+1}| &= d(|y_{k+1}|, |y_k|) = d(f_1(y_k) + f_2(y_{k-1}) + \dots + f_p(y_{k-p+1}) + u_k, |y_k|) \\ &\geq L_1 |\Delta B_k| + L_2 |\Delta B_{k-1}| + \dots + L_p |\Delta B_{k-p+1}|. \end{aligned} \quad (3.100)$$

从而跟定理3.3 或定理3.7类似, 可以完成定理3.9 和定理3.10的证明。□

### 3.3.2.4 定理3.1 和定理3.8的证明

基于定理3.3的证明思想, 我们可以给出定理3.1的证明。由于定理3.8的证明本质上与定理3.1的证明类似, 所以我们只需给出定理3.1的证明。

从定理3.3和3.7的证明, 可以看出条件(★) 或(★★) 或其他类似(但更复杂一些)条件的给出主要是保证在某种初始条件下, 对任意的 $t$  和 $|B_t| \rightarrow \infty$  当 $t \rightarrow \infty$ , 有 $|\Delta B_t| > 0$  成立。其中

$$|\Delta B_{k+1}| \geq L_1|\Delta B_k| + L_2|\Delta B_{k-1}| + \cdots + L_p|\Delta B_{k-p+1}| - \frac{1}{2}|B_k| \quad (3.101)$$

或

$$|B_{k+1}| \geq (L_1 + \frac{1}{2})|B_k| + (L_2 - L_1)|B_{k-1}| + \cdots + (L_p - L_{p-1})|B_{k-p+1}| - L_p|B_{k-p}| \quad (3.102)$$

事实上为保证以上不等式成立, 我们需要一些有关差分方程与不等式的结果。

首先我们给出几个引理。

**引理 3.12.** 考虑以下差分不等式:

$$z_n \geq a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \cdots + a_p z_{n-p} + a_{p+1} z_{n-p-1}. \quad (3.103)$$

且记 $\{x_n\}$ 为相应的差分方程的解

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_{p+1} x_{n-p-1} \quad (3.104)$$

其初始条件为

$$x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = \cdots = x_{-p} = 0. \quad (3.105)$$

(i) 在某些初值条件下, 对任意 $n > 0$ , 不等式(3.103)的每个解 $\{z_n\}$ 是正值的充要条件是对任意的 $n > 0$ , 有 $x_n > 0$ 成立。

(ii) 在某些初值条件下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 不等式(3.103)的每个解 $\{z_n\}$ 严格单增趋于 $\infty$ 的充要条件是当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $x_n$ 严格趋于 $\infty$ 。

证明: 为方便起见, 我们定义 $v_n$ 为以下差分方程的解

$$v_n = a_1 v_{n-1} + a_2 v_{n-2} + \cdots + a_{p+1} v_{n-p-1} \quad (3.106)$$

其初始条件

$$v_k = c_0, v_{k-1} = c_1, \dots, v_{k-p} = c_p \quad (3.107)$$

记做 $T_n^{(k)}(c_0, c_1, \dots, c_p)$ 。由此定义,  $T_n^{(k)}$  关于 $(c_0, c_1, \dots, c_p)$ 是线性的。显然, 由 $x_n$ 的定义, 可得 $x_n = T^{(0)}(1, 0, \dots, 0)$ 。

则对不等式(3.103)的解 $\{z_n\}$ , 我们可以证明对任意的 $n > 0$ ,

$$z_n = z_n^{(0)} + z_n^{(1)} + z_n^{(2)} + \dots + z_n^{(n-1)} + d_n, \quad (3.108)$$

其中 $\{d_k\}$  是一个非负序列且

$$\begin{aligned} z_n^{(0)} &= T_n^{(0)}(z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p}), \\ z_n^{(k)} &= T_n^{(k)}(d_k, 0, \dots, 0) \text{ 对 } k > 0. \end{aligned} \quad (3.109)$$

事实上, 给出 $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p}$ , 我们可以定义 $z_n^{(0)} = T_n^{(0)}(z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p})$ ; 由于 $z_1 \geq a_1 z_0 + a_2 z_{-1} + \dots + a_{p+1} z_{-p}$ , 可定义 $d_1 = z_1 - (a_1 z_0 + a_2 z_{-1} + \dots + a_{p+1} z_{-p}) = z_1 - z_1^{(0)}$ , 且让 $z_n^{(1)} = T_n^{(1)}(d_1, 0, \dots, 0)$ . 因此

$$\begin{aligned} &a_1 z_1 + a_2 z_0 + \dots + a_{p+1} z_{-p+1} \\ &= a_1 d_1 + (a_1 z_1^{(0)} + a_2 z_0 + \dots + a_{p+1} z_{-p+1}) \\ &= T_2^{(1)}(d_1, 0, \dots, 0) + T_2^{(0)}(z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p}) \\ &= z_2^{(1)} + z_2^{(0)}, \end{aligned} \quad (3.110)$$

且因 $z_2 \geq a_1 z_1 + a_2 z_0 + \dots + a_{p+1} z_{-p+1}$ , 可定义 $d_2 = z_2 - (a_1 z_1 + a_2 z_0 + \dots + a_{p+1} z_{-p+1}) = z_2 - z_2^{(1)} - z_2^{(0)}$ , 并让 $z_n^{(2)} = T_n^{(2)}(d_2, 0, \dots, 0)$ . 反复此过程, 我们可以看出(3.108)成立。

因此不等式(3.103)的每个解都对应初始值 $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p}$  和一个非负序列 $\{d_k\}$ 。显然, 反过来也同样成立: 给出初始值 $z_0, z_{-1}, \dots, z_{-p}$  和一个非负序列 $\{d_k\}$ , 相应的我们可以得到不等式(3.103)的一个解 $\{z_n\}$ 。

注意到差分方程(3.108)是线性的, 对 $k > 0$ , 由 $T_n^{(k)}$  和 $x_n$ 的定义,

$$z_n^{(k)} = T_n^{(k)}(d_k, 0, \dots, 0) = d_k T_n^{(k)}(1, 0, \dots, 0) = d_k x_{n-k}, \quad (3.111)$$

因此我们可以重新改写式(3.108) 为

$$z_n = z_n^{(0)} + d_1 x_{n-1} + d_2 x_{n-2} + \dots + d_{n-1} x_1 + d_n. \quad (3.112)$$

(i) 充分性可以很容易证明。事实上, 对任意  $n > 0$ , 假设  $x_n > 0$ , 我们只需取初值  $z_0 = c, z_{-1} = z_{-2} = \cdots = z_{-p} = 0$ , 其中  $c > 0$  可以为任意正实数, 因此  $z_n^{(0)} = T_n^{(0)}(c, 0, \cdots, 0) = cx_n > 0$ 。从而对任意的非负数序列  $\{d_k\}$  及任意的  $n > 0$ ,  $z_n = z_n^{(0)} + d_1x_{n-1} + d_2x_{n-2} + \cdots + d_{n-1}x_1 + d_n > 0$  成立。

接下来证明必要性。假设  $z_0, z_{-1}, \cdots, z_{-p}$  可取任意值[在以下讨论中固定], 不等式(3.103)的每个解  $z_n (n > 0)$  为正值。因此由等式(3.108), 对每个正数序列  $\{d_k\}$  及任意整数  $n > 0$ ,

$$z_n = z_n^{(0)} + d_1x_{n-1} + d_2x_{n-2} + \cdots + d_{n-1}x_1 + d_n \quad (3.113)$$

必为正值。为证明这一点, 则对任意  $n > 0$  必有  $x_n \geq 0$ , 下面我们采用反证法来证明。实际上, 假设存在某个  $n = N$  使得  $x_N < 0$ , 由  $d_1$  的任意性知对充分大的  $d_1$ , 式  $z_{N+1} = z_{N+1}^{(0)} + d_1x_N + d_2x_{N-1} + \cdots + d_n$  为负值, 这与  $z_{N+1} > 0$  矛盾。

(ii) 充分性与(i)中类似很容易证明。另外由正数  $\{d_k\}$  的任意性和反证法, 可以像(i)中那样来证得必要性。  $\square$

**引理 3.13.** 设  $\{x_n\}$  为如下差分方程的解

$$x_n = (L_1 + \frac{1}{2})x_{n-1} + (L_2 - L_1)x_{n-2} + \cdots + (L_p - L_{p-1})x_{n-p} - L_px_{n-p-1} \quad (3.114)$$

其初始条件满足

$$x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = \cdots = x_{-p} = 0, \quad (3.115)$$

其中  $L_1, L_2, \cdots, L_p$  为正实数。则如下的条件是相互等价的:

1. 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n$  严格单增趋于  $\infty$ ;
2.  $x_n$  严格单增, 即对任意的  $n > 0$ ,  $x_{n-1} < x_n$ ;
3. 对任意的  $n > 0$ ,  $F^{(n-1)}(0) < nF^{(n)}(0)$ , 其中函数  $F(z)$  的定义在注 3.3.5 中给出。

证明: 显然  $1 \implies 2$ 。现在我们来证明  $2 \implies 1$ 。事实上, 若不然, 则由条件 1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A < \infty$  存在, 且通过在等式(3.114)两边取极限, 可得

$$A = (L_1 + \frac{1}{2})A + (L_2 - L_1)A + \cdots + (L_p - L_{p-1})A - L_pA = \frac{1}{2}A, \quad (3.116)$$



因此  $A = 0$ , 这与  $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  矛盾。

2  $\iff$  3 可由注3.3.5直接得出。  $\square$

为便于叙述, 我们引入以下两个条件:

**条件A** 对  $|B_0|, |B_{-1}|, \cdots, |B_{-p+1}|$  存在某种初始条件, 使得对不等式(3.102)的任意解  $\{|B_t|\}$ , 总能得到对任意的  $t > 0$ , 有  $|\Delta B_t| > 0$  和当  $t \rightarrow \infty$  时,  $|B_t| \rightarrow \infty$ 。

**条件B** 以下差分方程的解  $\{x_n, n \geq 0\}$  是严格单增的:

$$x_n = (L_1 + \frac{1}{2})x_{n-1} + (L_2 - L_1)x_{n-2} + \cdots + (L_p - L_{p-1})x_{n-p} - L_p x_{n-p-1} \quad (3.117)$$

其初始条件为

$$x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = \cdots = x_{-p} = 0. \quad (3.118)$$

基于引理3.12和3.13, 立即可得

**命题 3.14.** 条件A成立当且仅当条件B成立。

条件A或B是否成立依赖于  $L = (L_1, L_2, \cdots, L_p)$  的取值。因此每一个条件决定了  $L$  的一个区域。命题3.14断定: 条件A和B决定的区域是一样的。条件B仅涉及差分方程, 而条件A涉及差分不等式, 因此验证条件B要比验证条件A的困难小得多。而根据前面定理的证明, 条件A决定了反馈机制的极限, 从而命题3.14将这一问题与线性差分方程联系起来。

条件B正是定理3.1的条件。因此定义

$$\mathcal{L}_p \triangleq \{(L_1, L_2, \cdots, L_p) | L_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, p); \text{条件B成立}\},$$

继而通过应用以上证明中给出的主要思想, 我们可得到定理3.1。  $\square$

我们仍然不知道哪些  $L_1, L_2, \cdots, L_p$  可使命题3.14中的条件B成立。能否找到便于验证的条件使得条件B成立? 怎样计算  $\mathcal{L}_p$ ? 对  $p = 2$  的特殊情形, 我们将在下一小节中作一些计算和分析。

现在我们引入另一条件, 当给出  $L_1, L_2, \cdots, L_p$  时, 可以对其直接验证。

**条件C:** 这一条件要求  $\lambda_0 \in \mathcal{R}$  和  $\lambda_0 > 1$ , 其中  $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$  是以下多项式的根

$$P(z) = z^{p+1} - (L_1 + \frac{1}{2})z^p - (L_2 - L_1)z^{p-1} - \cdots - (L_p - L_{p-1})z + L_p \quad (3.119)$$

其大小顺序为

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_p|. \quad (3.120)$$

**条件B\*** 序列  $\{x_n, n \geq 0\}$  是渐近严格单增的, 即存在整数  $N \geq 0$  使得对任意的  $n > N$ ,  $x_n < x_{n+1}$ . 其中  $\{x_n\}$  在条件  $B$  中定义。

显然条件  $B$  比条件  $B^*$  要强一些。下面我们可以证明

**命题 3.15.** 条件  $B^*$  成立当且仅当条件  $C$  成立。

**必要性证明:** 考虑条件  $B$  中定义的  $\{x_n\}$ 。假设当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\{x_n\}$  渐近单增趋于  $\infty$ 。因此我们只需证明  $\lambda_0 \geq 1$ , 因为  $P(1) = \frac{1}{2} \neq 0$  这意味着 1 不是  $P(z)$  的根。

首先我们来考虑  $P(z)$  所有根都不同的情形。由线性差分方程的基本定理, 必有

$$x_n = c_0 \lambda_0^n + c_1 \lambda_1^n + \cdots + c_p \lambda_p^n, \quad (3.121)$$

其中  $c_0, c_1, \dots, c_p$  是由初始条件决定的一些常数。事实上我们可以证明

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{\lambda_0^p}{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda_0 - \lambda_2) \cdots (\lambda_0 - \lambda_p)}, \\ c_1 &= \frac{\lambda_1^p}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_p)}, \\ &\vdots \\ c_p &= \frac{\lambda_p^p}{(\lambda_p - \lambda_0)(\lambda_p - \lambda_1) \cdots (\lambda_p - \lambda_{p-1})}, \end{aligned} \quad (3.122)$$

这可以由以下线性方程得到

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 + \cdots + c_p &= 1, \\ c_0 \lambda_0^{-1} + c_1 \lambda_1^{-1} + \cdots + c_p \lambda_p^{-1} &= 0, \\ &\vdots \\ c_0 \lambda_0^{-p} + c_1 \lambda_1^{-p} + \cdots + c_p \lambda_p^{-p} &= 0. \end{aligned} \quad (3.123)$$

显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_0 + \frac{c_1 \lambda_1}{c_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n + \cdots + \frac{c_p \lambda_p}{c_0} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_0}\right)^n}{1 + \frac{c_1}{c_0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n + \cdots + \frac{c_p}{c_0} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_0}\right)^n} \quad (3.124)$$

因此如果  $|\lambda_0| \neq |\lambda_1|$ , 可得  $|\lambda_0| > |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_p|$ 。从而对  $i = 1, 2, \dots, p$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right)^n \rightarrow 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_0 \geq 1$ 。现在考虑  $|\lambda_0| = |\lambda_1|$  的情形, 显然  $\lambda_0$  和  $\lambda_1$  不能同时为实数, 若不然则有  $\lambda_1 = -\lambda_0$  且  $\{x_n\}$  为振荡序列。因此  $\lambda_0$  和  $\lambda_1$  必为共轭复数, 即  $\lambda_{0,1} = r e^{\pm i\omega} = r(\cos \omega \pm i \sin \omega)$ , 并且我们知道  $\lambda_{0,1}$  在  $x_n$  中的贡献是

$$c_0 \lambda_0^n + c_1 \lambda_1^n = c'_0 r^n \cos(n\omega + c'_1),$$

当  $n \rightarrow \infty$  时这将是振荡的, 因此  $\{x_n\}$  不可能是严格单增的, 这与条件  $B^*$  矛盾。

现在考虑一般情形。与上面讨论类似, 我们只需考虑具有最大模的根  $\lambda_0$ 。假设  $\lambda_0$  是多项式  $P(z)$  的  $k$  ( $k > 1$ ) 重根。(1) 如果  $\lambda_0$  为一实数, 则  $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1}$  在  $x_n$  中的贡献是

$$(c_0 + c_1 n + \cdots + c_{k-1} n^{k-1}) \lambda_0^n,$$

从而与(3.124)类似, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_0 \geq 1. \quad (3.125)$$

(2) 否则,  $\lambda_0 = r e^{i\omega}$  为一复数, 且  $r e^{-i\omega}$  必为多项式  $P(z)$  的  $k$  重根。则  $k$  重共扼复根  $r e^{\pm i\omega}$  对  $x_n$  的贡献为

$$[c'_0 \cos(n\omega + c'_1) + c'_2 n \cos(n\omega + c'_3) + \cdots + c'_{2(k-1)} n^{k-1} \cos(n\omega + c'_{2k-1})] r^n,$$

显然当  $n \rightarrow \infty$  时上式震荡趋于无穷远, 从而  $\{x_n\}$  不可能是严格单增的, 这与条件  $B^*$  矛盾。

总之, 我们证明了多项式  $P(z)$  的具有最大模的根  $\lambda_0$  必为实数且有  $\lambda_0 > 1$ 。

充分性证明: 我们仅需证明当  $\lambda_0 \in \mathcal{R}$  且  $\lambda_0 > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ 。假设  $\lambda_0$  是多项式  $P(z)$  的  $k$  重根, 则由线性差分方程定理, 根  $\lambda_0$  在  $x_n$  中的贡献是  $K(n) = (c_0 + c_1 n + \cdots + c_{k-1} n^{k-1}) \lambda_0^n$ 。由于  $\lambda_0$  是具有最大模的根, 所以其它根在  $x_n$  中的贡献是  $o(K(n))$ 。因此  $x_n = K(n) + o(K(n))$ , 从而有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(n+1)}{K(n)} = \lambda_0 > 1 \quad (3.126)$$

命题3.15得证。 □

由命题3.15可知条件  $C$  是条件  $B$  成立的必要条件, 那么我们会问: 它是条件  $B$  的充分条件吗? 从计算机数值计算结果来看, 答案似乎是肯定的[详细参看下一节], 因此我们猜想

**命题 3.16.** 条件  $B$  成立当且仅当条件  $C$  成立。

为证明这一猜测, 我们只需证明条件  $B^*$  蕴含着条件  $B$ 。由于很少有工具能处理序列的非渐近性质, 这一猜测目前还没找到证明的方法。如果我们能严格证明上面的猜测, 则可以重新定义集合  $\mathcal{L}_p$  为

$$\mathcal{L}_p \triangleq \{(L_1, L_2, \cdots, L_p) | L_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, p); \text{条件 } C \text{ 成立}\}, \quad (3.127)$$

当给出  $L_1, L_2, \cdots, L_p$  的情况下, 条件  $C$  可以直接验证。

### 3.3.3 反面—进一步讨论

很自然地人们会问以下问题:

1. 我们已经推广了以前的结果, 那么是多大程度上的推广?
2. 前面的结果没有直接算出不可稳区域 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ , 那么能否显式地写出此区域?
3. 定理3.3, 3.7和3.1中的条件容易验证吗?

为了回答这些问题, 在这一小节中我们将通过具体计算把本章的结果与以前的结果做一下比较; 且对 $p = 2$ 的特殊情形, 我们通过采用多种不同的方法来计算这一区域。

#### 3.3.3.1 与前人结果的比较

现在我们对我们的结果及以前的结果做一比较。

**以前的结果** 我们不必考虑 $p = 1$ 的情形, 因为在此情形下 $\frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx 2.91421 \dots$ 完全刻画了反馈机制的极限。对(3.3)中的条件, 通过计算我们可以得到以下结果, 在表一中列出。

可以看出当 $p \rightarrow \infty$ 时,  $L$ 的临界值递减, 且容易看出当 $p \rightarrow \infty$ 时将趋于 $\frac{1}{2}$ 。

**我们的结果** 对每一正整数 $p$ 和实常数 $\lambda > 1$ , 定义

$$R_p(\lambda) \triangleq \{(L_1, L_2, \dots, L_p) | P(\lambda) \leq 0 \text{ 且 } K_i \geq 0, L_i \geq 0 \ i = 1, 2, \dots, p\} \quad (3.128)$$

其中常数 $K_i, i = 1, 2, \dots, p$ 和多项式 $P(z)$ 如定理3.3中定义。继而可以定义

$$\mathcal{R}_p \triangleq \bigcup_{\lambda > 0} R_p(\lambda). \quad (3.129)$$

由定理3.3, 对任意 $(L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{R}_p$ , 系统(3.6)将对任意控制律不可稳。下面我们将研究如何计算区域 $\mathcal{R}_p$ , 一般来说这不是一个简单的问题。

表3.2中的结果是通过把 $\lambda$ 固定, 计算 $R_p(\lambda)$ 得到。[注: 在表3.2中,  $\lambda^*(p)$ 为方程 $\lambda^{p+1} - (p+1)\lambda + \frac{1}{2}p = 0$ 的最大实根, 且 $\alpha_i \in [0, 1] (i = 1, 2, \dots, p)$ 可取任意值使得 $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ 。]为节省空间, 仅仅列出 $p = 1, p = 2, p = 3$ 的情形。

通过使 $\lambda$ 取不同值, 我们可以得到 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ 的不同的重叠区域。可以看到在表3.2中 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ 的区域明显比表3.1中 $L_1 = L_2 = \dots = L_p (= L)$ 的

表 3.1: 已有的结果(根据[121]计算)

$p$	$L$ 的区域
1	$L \geq 2.914213562$
2	$L \geq 1.79813$
3	$L \geq 1.41326$
4	$L \geq 1.21485$
5	$L \geq 1.0925$
6	$L \geq 1.0089$
7	$L \geq 0.947842$
8	$L \geq 0.901106$
9	$L \geq 0.86407$
10	$L \geq 0.833925$
100	$L \geq 0.550896$
200	$L \geq 0.528564$

表 3.2: 区域 $\mathcal{R}_p(\lambda)$ 中的一些点

$p$	取 $\lambda = \lambda^*(p)$	取 $\lambda = 1.05$	取 $\lambda = 1.40$	取 $\lambda = 1.70$
1	$L_1 \geq 2.914213562$	$L_1 \geq 11.5500$	$L_1 \geq 3.1500$	$L_1 \geq 2.9143$
2	$\begin{cases} L_1 \geq 1.0321\alpha_1 + 2.9718\alpha_2 \\ L_2 \geq 2.9718\alpha_1 \end{cases}$	$\begin{cases} L_1 \geq 0.5500\alpha_1 + 11.5500\alpha_2 \\ L_2 \geq 11.5500\alpha_1 \end{cases}$	$\begin{cases} L_1 \geq 0.9000\alpha_1 + 3.1500\alpha_2 \\ L_2 \geq 3.1500\alpha_1 \end{cases}$	$\begin{cases} L_1 \geq 1.2000\alpha_1 + 2.9143\alpha_2 \\ L_2 \geq 2.9143\alpha_1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} L_1 \geq 0.9349\alpha_3 + 0.9349\alpha_1 \\ L_2 \geq 3.0845\alpha_3 + 4.4261\alpha_2 \\ L_3 \geq 4.4261\alpha_1 \end{cases}$	$\begin{cases} L_1 \geq 0.5500\alpha_3 + 0.5500\alpha_1 \\ L_2 \geq 11.5500\alpha_3 + 12.1275\alpha_2 \\ L_3 \geq 12.1275\alpha_1 \end{cases}$	$\begin{cases} L_1 \geq 0.9000\alpha_3 + 0.9000\alpha_1 \\ L_2 \geq 3.1500\alpha_3 + 4.4100\alpha_2 \\ L_3 \geq 4.4100\alpha_1 \end{cases}$	$\begin{cases} L_1 \geq 1.2000\alpha_3 + 1.2000\alpha_1 \\ L_2 \geq 2.9143\alpha_3 + 4.9543\alpha_2 \\ L_3 \geq 4.9543\alpha_1 \end{cases}$

情形大,这是由于引入了多个Lipschitz常数来刻画系统不确定性的缘故。例如,以前的结果中当 $p \rightarrow \infty$ 时, $L_1$ 接近 $\frac{1}{2}$ ;但在我们的结果中表明,在 $p \geq 2$ 的情形如果我们取 $\alpha_1 = 1$ 且 $\lambda \rightarrow 1$ ,则这一极限可以达到。对 $p = 2$ 的情形,后面将画出 $p = 2$ 时的不可稳区域。

能把条件(\*)去掉吗? 我们前面已提到:一般来说,定理3.3中条件(\*)不能去掉,也就是说,仅仅具有条件“对某个 $\lambda \in (1, \infty)$ 有 $P(\lambda) \leq 0$ ”不能保证系统(3.6)对任意控制律不可稳。这是引入多个Lipschitz常数后要比已有结果复杂的原因。下面我们通过一个反例来说明这点。

事实上如果取 $p = 2$ 且 $L_1 = \frac{1}{2}, L_2 = 4$ ,则有 $P(z) = z^3 - (L_1 + \frac{1}{2})z^2 + (L_1 - L_2)z + L_2 = z^3 - z^2 - 3.5z + 4$ 。显然 $P(1.5) = -0.125 < 0$ ,于是不

等式  $P(z) \leq 0$  有一个解  $z = 1.5 \in (1, \infty)$ 。现在我们考虑相应的差分不等式  $z_n \geq z_{n-1} + 3.5z_{n-2} - 4z_{n-3}$ 。由命题3.14, 条件A 与条件B是等价的, 因此我们只需验证  $\{x_n\}$  是否单调递增即可, 其中  $x_n$  满足递推公式  $x_n = x_{n-1} + 3.5x_{n-2} - 4x_{n-3}$  且初始条件为  $x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = 0$ 。事实上, 通过简单计算可得  $x_4 = 1, x_5 = 4.5, x_6 = 4.0, x_7 = 15.75, x_8 = 11.75, x_9 = 50.875, x_{10} = 29.000, \dots, x_{15} = 1590.984375, x_{16} = -189.765625, \dots$  显然  $\{x_n\}$  是非递增的且确实有些项是负值! 因此定理3.3中的条件(\*) 一般来说不能去掉。我们在下面还将看到, 对特殊情形  $p = 2$ , 通过定理3.3中的条件算出的不可稳区域与最一般的定理3.1算出的区域是相同的。

### 3.3.3.2 特殊情形: $p = 2$

基于条件(\*)的计算方法

定理 3.17. 对于  $p = 2$  的情形, 如果

$$(L_1, L_2) \in \mathcal{R}_2 \triangleq \{\text{由 } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ 与 } \Gamma_0 \text{ 围成的区域}\}, \quad (3.130)$$

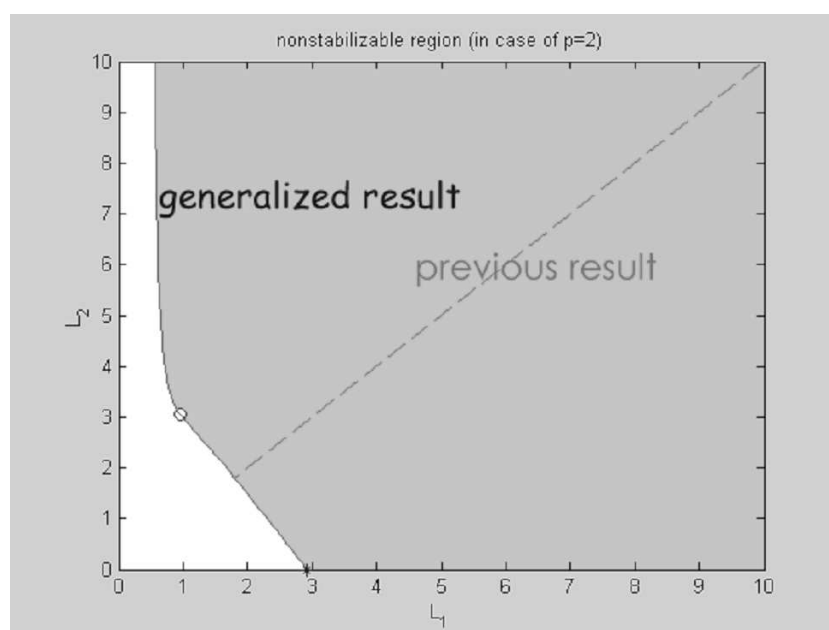
其中 ( $\lambda > 1$ )

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\triangleq \{L_1 = \lambda - \frac{1}{2}, L_2 = \frac{\lambda(2\lambda-1)}{(2\lambda-2)}\}, \\ \Gamma_2 &\triangleq \{L_1 = \frac{\lambda(4\lambda^2-7\lambda+2)}{2\lambda^2-4\lambda+2}, L_2 = \frac{-\lambda(2\lambda^2-4\lambda+1)}{2\lambda^2-4\lambda+2}\}, \\ \Gamma_0 &\triangleq \{L_2 = 0\}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

则系统(3.6) 对任意控制律不可稳。

注3.3.16.

$\Gamma_1$ 是代数(圆锥)曲线  $2L_1^2 + L_1 + L_2 - 2L_1L_2 = 0$ 的一部分, 且  $\Gamma_2$ 是代数曲线  $4L_1^4 + 8L_1^3L_2 - 12L_1^3 + 4L_1^2L_2^2 - 8L_1^2L_2 + L_1^2 + 28L_1L_2^2 - 26L_1L_2 + 16L_2^3 + 2L_2 = 0$ 的一部分。


 图 3.1:  $p = 2$ : 基于条件(\*)的计算结果

区域 $\mathcal{R}_2$ 在图3.1中绘出,其中标作‘o’的点( $\lambda \approx 1.4516, L_1 \approx 0.951606, L_2 \approx 3.05877$ )是 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 的交叉点,且标作‘\*’的点( $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, L_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{2} \approx 2.91421, L_2 = 0$ )恰好与一阶情形的结果 $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 一致!由以前的结果计算出的 $(L_1, L_2)$ 的区域在图3.1中是直线 $L_1 = L_2$ 的一部分,它的起始端点恰为 $\Gamma_2$ 的一个点( $L_1 = L_2 \approx 1.79813$ )。我们也注意到 $p = 2$ 时对充分大的 $L_2$ ,曲线 $\Gamma_1$ 可以任意接近 $L_1 = \frac{1}{2}$ ,然而在以前的结果中只有通过让 $p \rightarrow \infty$ ,才能得到 $L_1$ 的极限 $\frac{1}{2}$ 。

证明:

$$\begin{aligned}
 R_2(\lambda) &= \left\{ (L_1, L_2) \left| \begin{array}{l} P(\lambda) \triangleq \lambda^3 - (L_1 + \frac{1}{2})\lambda^2 - (L_2 - L_1)\lambda + L_2 \leq 0, \\ K_1 \triangleq L_1 + \frac{1}{2} - \lambda \geq 0, \\ L_i \geq 0 \quad (i = 1, 2) \end{array} \right. \right\} \\
 &= \left\{ (L_1, L_2) \left| L_1 \in (\lambda - \frac{1}{2}, \infty), L_2 \geq \max\left(\frac{(\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2) - L_1(\lambda^2 - \lambda)}{\lambda - 1}, 0\right) \right. \right\}
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

显然,对任意固定的 $\lambda$ , $R_2(\lambda)$ 是由线性不等式决定的凸区域。下图显示了当 $\lambda$ 在 $(1, \infty)$ 变化时 $R_2(\lambda)$ 的变化。在本图中,每条直线对应一个确定的 $R_2(\lambda)$ ,而曲线(直线的包络)则表示这些线的端点轨道。

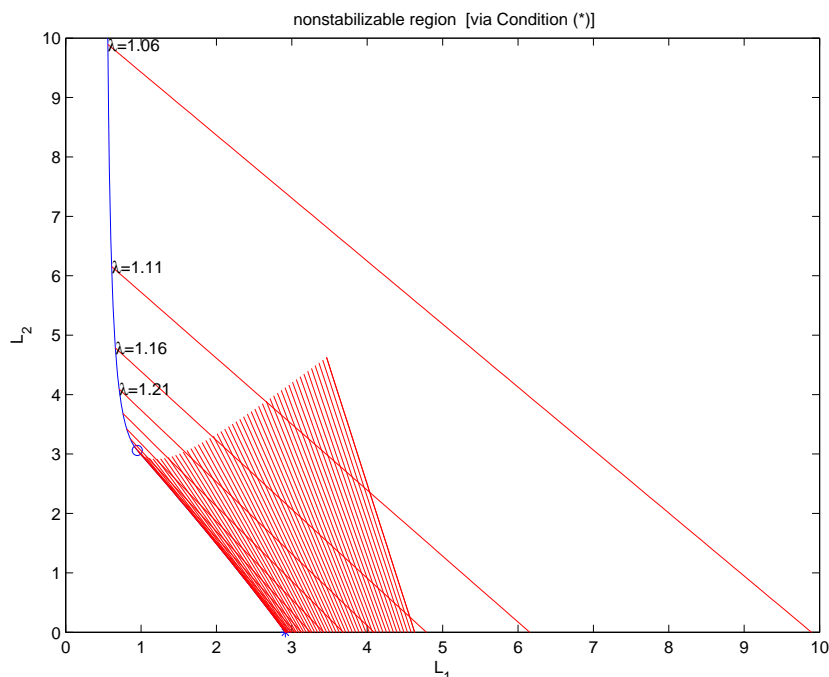


图 3.2:  $p = 2$ : 基于条件(\*)的计算过程

为计算区域  $\mathcal{R}_2 = \bigcup_{\lambda > 1} R_2(\lambda)$ , 我们只需确定其边界曲线。

从图3.1 和图3.2 中我们可以看出  $\mathcal{R}_2$  的边界并不简单, 可以分为三部分。上一部分显然有参数方程

$$\Gamma_1 \triangleq \left\{ L_1 = \lambda - \frac{1}{2}, L_2 = \frac{\lambda(2\lambda - 1)}{(2\lambda - 2)} \right\}, \quad (3.133)$$

且右一部分是  $L_1$ -轴的半部分, 左下角的部分  $\Gamma_2$  看似直线实则不是。实际上,  $\Gamma_2$  是一组曲线(直线)的包络

$$h(L_1, L_2, \lambda) = \left(\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) - L_1(\lambda^2 - \lambda) - L_2(\lambda - 1) = 0, \quad (3.134)$$

因此由微分几何的知识

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} h(L_1, L_2, \lambda) = (3\lambda^2 - \lambda) - L_1(2\lambda - 1) - L_2 = 0, \quad (3.135)$$

这样我们只需从以上两方程中消去  $\lambda$ , 就可得到关于  $\Gamma_2$  的参数方程, 从而定理3.17得证。□

由这个特殊情形, 我们可以看到  $p > 1$  时不可稳区域并不像想象的那么简单, 很难对每个  $p$  把相应的区域显式解出来。



**基于条件B的计算方法** 由上一小节的结果, 我们已经得到一个关于条件B的充要条件。根据这一条件, 利用Matlab等软件 (算法与程序略), 可以画出 $\mathcal{L}_2$ 的区域 (图3.3)。

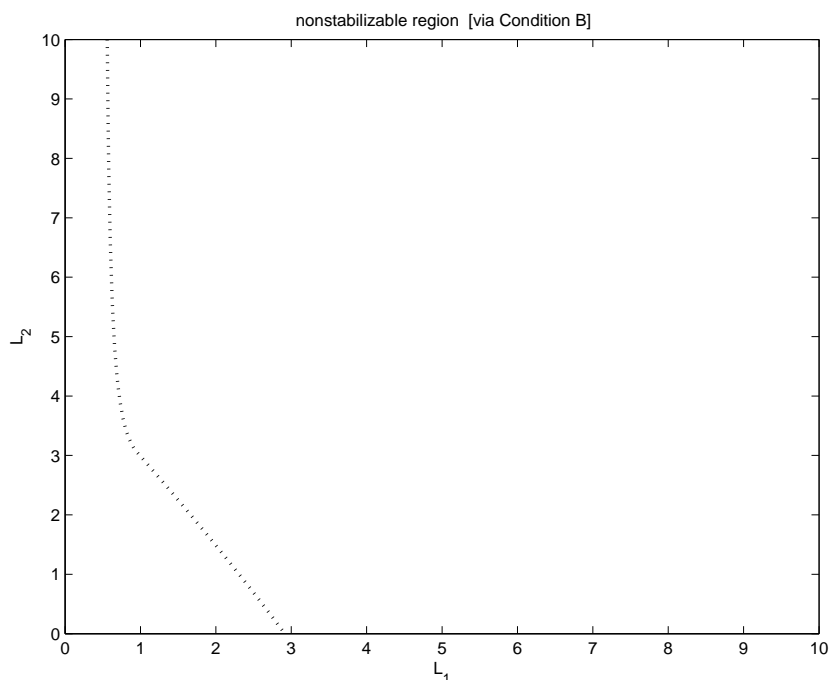


图 3.3:  $p = 2$ : 基于条件B的计算结果

从图3.3和图3.1中可以看出两种方法算出的区域重合, 这是否意味着 $\mathcal{L}_2 = \mathcal{R}_2$ ? 更一般地,  $\mathcal{L}_p = \mathcal{R}_p$ 是否成立? 由命题3.14可知 $\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{L}_p$ , 只需再证 $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{R}_p$ ; 然而即使对 $p = 2$ 的特殊情形, 从理论上我们还不能证明这一猜测。

类似条件B, 我们可以定义以下条件:

**条件B'** 差分方程

$$x_n = (L_1 + \frac{1}{2})x_{n-1} + (L_2 - L_1)x_{n-2} + \cdots + (L_p - L_{p-1})x_{n-p} - L_px_{n-p-1} \quad (3.136)$$

满足初始条件

$$x_0 = 1, x_{-1} = x_{-2} = \cdots = x_{-p} = 0, \quad (3.137)$$

的解 $\{x_n\}$  对任意的 $n \geq 0$  是正值即 $x_n > 0$ 。

显然**条件B'**比**条件B**看起来要弱一些, 因此一般来说由**条件B'**决定的区域应该比由**条件B**决定的区域要大。可是数值计算表明这两个区域是一致的 (图

形略)! 这是另一个令人惊讶的结果, 但是到目前为止对它还没有严格的证明。这样我们猜测

**命题 3.18.** 条件  $B$  与条件  $B'$  是等价的。

**基于条件C的计算方法** 我们已经证明条件  $C$  是条件  $B$  成立的必要条件, 但理论上还未说明它是否是条件  $B$  成立的充分条件。根据条件  $C$ , 很容易通过计算机算法画出  $(L_1, L_2)$  的区域, 其结果显示在图3.4中。

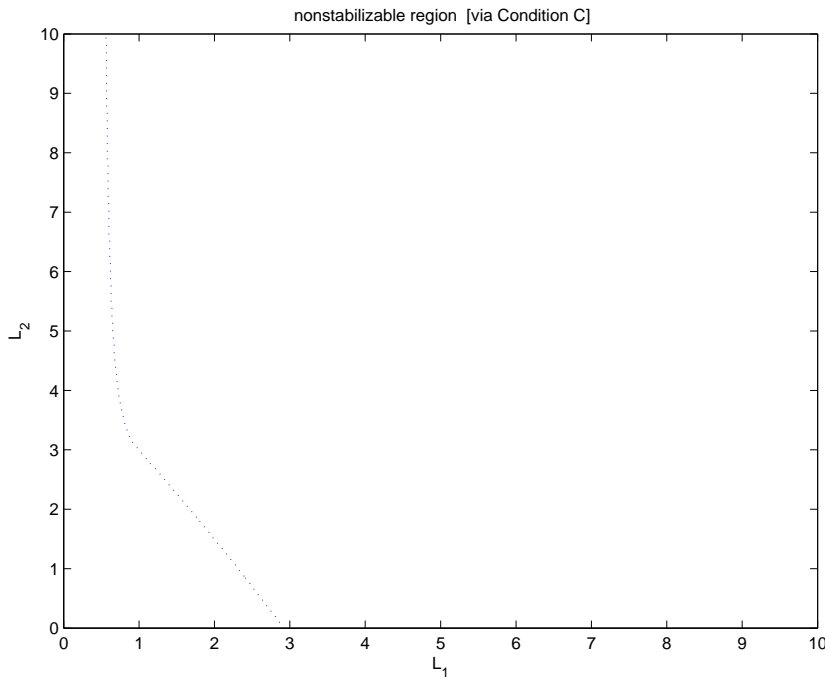


图 3.4:  $p = 2$ : 基于条件C的计算结果

从图3.4 中我们可以看出根据条件  $C$  得出的结果与图3.2 中根据条件  $(\star)$  得出的结果和图3.3 中根据条件  $B$  得出的结果是一样的!

综合以上结果, 我们发现一个有意思的现象— 所有数值计算结果表明

**猜想 3.1.** 以上列出的条件, 包括条件  $(\star)$ , 条件  $A$ , 条件  $B$ , 条件  $B'$ , 条件  $B^*$  和条件  $C$ , 都是相互等价的。

我们已经严格证明了以上条件中的很多关系, 然而在数学上仍有一些问题还未解决, 还需要进一步的探索。

### 3.3.3.3 对称情形

现在我们讨论“对称”情形的结果，即 $g \in \mathcal{G}_{sym}(L)$ 。直观上，除了知道 $g \in \mathcal{G}(L)$ ，还知道更多的先验信息，因此反馈机制的局限可能少一些。这一点可从图3.5中清楚的看出来。

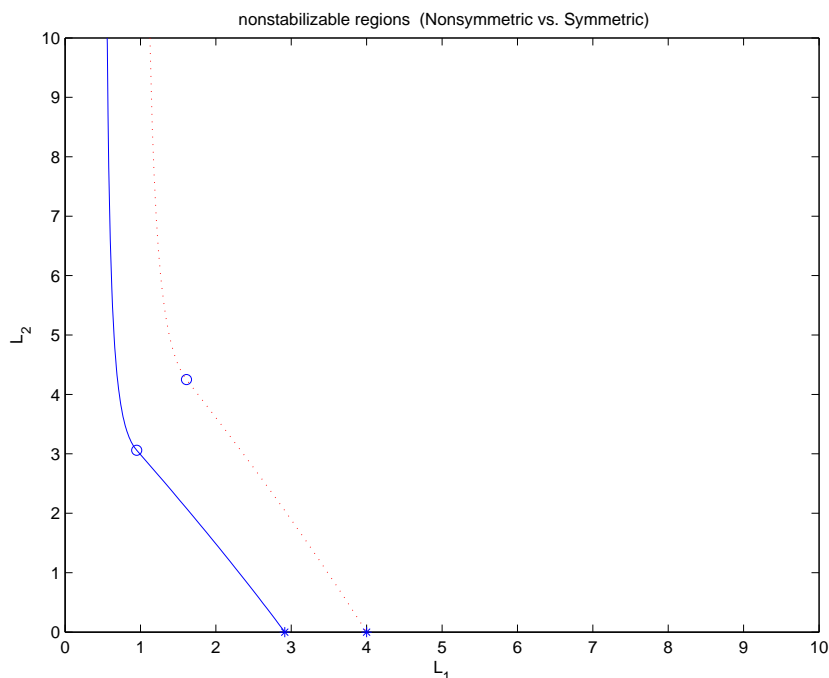


图 3.5:  $p = 2$ : 对称情形与非对称情形对比

在图3.5中，实线代表我们仅知道 $g \in \mathcal{G}(L)$  情况下不可稳区域的边界，这在前面已经详细讨论过；点划线代表我们进一步知道 $g \in \mathcal{G}_{sym}(L)$ 时对称情形下的不可稳区域边界。显然，后一区域比前一区域要小。在此，区域边界可以通过前面提到的任意方法画出，只需把所有的 $L_1 + \frac{1}{2}$ 换成 $L_1$ 。尽管我们还没完全证明这些方法间的等价性，但是数值计算的结果对这种对称情形得出了同样令人惊讶的结果。这也表明在对称情形下，**猜测3.1**也可能成立。

#### 注3.3.17.

以上数值计算结果可以激发以下对线性差分方程或不等式中有意义的问题：如果我们把**条件B**、**条件B'**、**条件B\*** 和**条件C**推广到一般线性递推方程

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_{p+1} x_{n-p-1}, \quad (3.138)$$

那么  $a_1, a_2, \dots, a_{p+1}$  在什么条件下可使得差分方程 (3.138) 的解  $\{x_n\}$  具有类似性质 (所有这些条件间具有等价性)? 这种问题在线性差分方程和不等式理论中看起来很基本, 然而据我们所知, 已有的理论对这类问题不能提供现成的答案。因此在纯数学意义上来说研究这些问题也是有价值的, 并且可能会得出一些无法预料的应用, 至少从前面我们已经看出这些问题对深入理解整个反馈机制的能力和极限问题起着重要作用。

### 3.4 正面结果

为得到正面结果, 由于分析上的一些困难, 我们仅考虑对称情形, 即  $g \in \mathcal{G}_{sym}(L)$  的情形。我们希望找到关于  $L = (L_1, L_2, \dots, L_p)$  的条件, 使得在此条件下能构造出闭环稳定的控制器, 并能够使系统的输出  $\{y_t\}$  尽可能跟踪一列有界的已知参考信号  $\{y_t^*\}$ 。我们假设噪声  $|w_t| \leq w$ , 参考信号  $|y_t^*| \leq S$ 。

#### 3.4.1 正面—主要结果

为叙述方便, 我们引入如下条件:

##### 条件3.4.1.

常数  $L_1 \geq 0, L_2 \geq 0, \dots, L_p \geq 0$  使得下述差分不等式

$$|x_{t+1}| \leq d + \min_{i < t} \{L_1|x_t - x_i| + L_2|x_{t-1} - x_{i-1}| + \dots + L_p|x_{t-p+1} - x_{i-p+1}|\} \quad (3.139)$$

的任意非负解  $\{x_t\}$  有界。其中  $d$  为任意正常数。

##### 注3.4.1.

容易证明: 条件 3.4.1 是否成立, 与常数  $d$  的取值无关。证明过程在此略去。

##### 注3.4.2.

记  $X_t = (|x_t|, |x_{t-1}|, \dots, |x_{t-p+1}|)^T \in \mathcal{R}^p$ , 并设点集  $\mathcal{P}_t = \{X_0, X_1, \dots, X_{t-1}\}$ , 则差分不等式 (3.139) 的解  $\{x_t\}$  可以理解为满足几何约束

$$|x_{t+1}| \leq d + \rho(X_t, \mathcal{P}_t) \quad (3.140)$$

的一个点列  $\{X_t\}$ , 其中  $\rho(\cdot, \cdot)$  代表下式定义的一个距离:

$$\rho(X, X') \triangleq \sum_{k=1}^p L_k ||X_{(k)}| - |X'_{(k)}||, \quad (3.141)$$

这里  $X_{(k)}, X'_{(k)}$  分别代表  $X, X'$  的第  $k$  个分量。

显然条件3.4.1是否成立, 取决于 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ 的取值。为叙述方便, 我们记使得条件3.4.1成立的所有 $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ 的集合为 $\mathcal{S}_p$ 。

**定理 3.19.** 如果 $(L_1, L_2, \dots, L_p) \in \mathcal{S}_p$ , 即条件3.4.1成立, 则存在反馈控制律使得系统(3.6)在如下意义下全局稳定:

$$\sup_{t \geq 0} |y_t| < \infty; \quad (3.142)$$

并且

$$\limsup_{t \geq 0} |y_t - y_t^*| \leq 2w. \quad (3.143)$$

从条件3.4.1仍不能直接求出区域 $\mathcal{S}_p$ , 因此后面将对条件作进一步的讨论。

### 3.4.2 正面—定理证明

为证定理3.19, 我们需要一个引理, 它是[116]中引理3.4的推广:

**引理 3.20.** 设 $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ 为一个有限维赋范度量空间, 并设 $\rho(\cdot, \cdot)$ 为范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的度量。若 $\mathcal{X}$ 中的序列 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 有界, 即 $\|X_n\| \leq M, \forall n \geq 0$  则有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \min_{i < n} \rho(X_n, X_i) = 0. \quad (3.144)$$

证明: 用反证法, 思想类似[116]中引理3.4的证明。记 $i_n = \arg \min_{i < n} \rho(X_n, X_i)$ 。假设引理不成立, 即

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n, X_{i_n}) = \varepsilon > 0. \quad (3.145)$$

从而必存在子序列 $\{X_{n_j}, j > 0\}$ 使得对任意 $j > 0$

$$\rho(X_{n_j}, X_{i(n_j)}) > \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.146)$$

故由 $i_n$ 的定义, 对任意 $i < n_j$ ,

$$\rho(X_{n_j}, X_i) > \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.147)$$

特别地对任意 $k < j$ ,

$$\rho(X_{n_j}, X_{n_k}) > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.148)$$

由 $\rho(\cdot, \cdot)$ 的对称性, 上式对任意 $k \neq j$ 都成立, 于是序列 $\{X_{n_j}\}$ 没有极限点。然而由于 $\mathcal{X}$ 为有限维赋范度量空间, 所以有界闭球 $S = \{X \in \mathcal{X} : \|X\| \leq M\}$ 为列紧集, 从而 $S$ 中的序列 $\{X_{n_j}\}$ 必有极限点。矛盾!  $\square$

**定理3.19的证明:** 设条件3.4.1成立, 在时刻 $t$ , 已知的信息有 $\{y_i, u_{i-1}, i \leq t\}$ , 我们需要构造控制律 $u_t$ 。令 $g_i \triangleq y_{i+1} - u_i = g(y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-p+1}) + w_{i+1}$ , 由Lipschitz条件, 我们有

$$\begin{aligned} |g_t - g_i| &= |[g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1}) + w_{t+1}] - [g(y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-p+1}) + w_{i+1}]| \\ &\leq |g(y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-p+1}) - g(y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-p+1})| + |w_{t+1} - w_{i+1}| \\ &\leq L_1|y_t| - |y_i| + L_2|y_{t-1}| - |y_{i-1}| + \dots + L_p|y_{t-p+1}| - |y_{i-p+1}| + 2w. \end{aligned} \quad (3.149)$$

取

$$i_t = \arg \min_{i < t} (L_1|y_t| - |y_i| + L_2|y_{t-1}| - |y_{i-1}| + \dots + L_p|y_{t-p+1}| - |y_{i-p+1}|), \quad (3.150)$$

构造控制律

$$u_t = y_{t+1}^* - g_{i_t} = y_{t+1}^* + u_{i_t} - y_{i_t+1}, \quad (3.151)$$

则有

$$\begin{aligned} |y_{t+1}| &= |g_t + u_t| = |g_t - g_{i_t} + y_{t+1}^*| \\ &\leq |g_t - g_{i_t}| + |y_{t+1}^*| \\ &\leq L_1|y_t| - |y_{i_t}| + L_2|y_{t-1}| - |y_{i_t-1}| + \dots + L_p|y_{t-p+1}| - |y_{i_t-p+1}| + 2w + S \\ &= d + \min_{i < t} \{L_1|y_t| - |y_i| + L_2|y_{t-1}| - |y_{i-1}| + \dots + L_p|y_{t-p+1}| - |y_{i-p+1}|\}, \end{aligned} \quad (3.152)$$

其中常数 $d = 2w + S$ 。式(3.152)对任意 $t > 0$ 都成立, 于是根据条件3.4.1, 序列 $\{y_t\}$ 有界, 可得闭环系统的稳定性。

由于 $\{y_t\}$ 有界, 故点列 $\{X_t\}$ 有界, 其中

$$X_t = (|y_t|, |y_{t-1}|, \dots, |y_{t-p+1}|)^\tau \in \mathcal{R}^p. \quad (3.153)$$

容易验证: 对任意 $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)^\tau$ ,

$$\|X\| \triangleq L_1|x_1| + L_2|x_2| + \dots + L_p|x_p| \quad (3.154)$$

定义了 $\mathcal{R}^p$ 上的一个范数, 并诱导出一个距离 $\rho(X, X')$ 。由引理3.20,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \min_{i < t} \rho(X_t, X_i) = 0. \quad (3.155)$$

由 $i_t$ 的定义,

$$\begin{aligned} |y_{t+1} - y_{t+1}^*| &= |g_t + u_t - y_{t+1}^*| = |g_t - g_{i_t}| \\ &\leq L_1|y_t| - |y_{i_t}| + L_2|y_{t-1}| - |y_{i_{t-1}}| + \cdots + L_p|y_{t-p+1}| - |y_{i_{t-p+1}}| + 2w \\ &= \min_{i < t} \rho(X_t, X_i) + 2w. \end{aligned} \quad (3.156)$$

于是

$$\limsup_{t \geq 0} |y_t - y_t^*| \leq 2w. \quad (3.157)$$

定理得证。  $\square$

### 3.4.3 正面—进一步讨论

为了进一步研究条件3.4.1, 我们引入如下一些条件:

#### 条件3.4.2.

对任意 $z \in (1, L_1)$ , 都有 $P_{sym}(z) > 0$ 。其中, 多项式 $P_{sym}(z)$ 定义为

$$P_{sym}(z) \triangleq z^{p+1} - L_1 z^p - (L_2 - L_1) z^{p-1} - \cdots - (L_p - L_{p-1}) z + L_p. \quad (3.158)$$

#### 条件3.4.3.

差分不等式

$$x_{t+1} \leq d + L_1|x_t - x_{t-1}| + L_2|x_{t-1} - x_{t-2}| + \cdots + L_p|x_{t-p+1} - x_{t-p}| \quad (3.159)$$

的任意单调正解 $\{x_t\}$ 有界。其中常数 $d \geq 0$ 。

#### 条件3.4.4.

差分不等式

$$z_{t+1} \leq d + L_1 z_t + L_2 z_{t-1} + \cdots + L_p z_{t-p+1} - L_1 z_{i_t} - L_2 z_{i_{t-1}} - \cdots - L_p z_{i_{t-p+1}} \quad (3.160)$$

的任意正解 $\{z_t\}$ 有界。其中常数 $d \geq 0$ ,  $i_t$ 定义为

$$i_t \triangleq \arg \max_{i < t, z_i < z_t} z_i. \quad (3.161)$$

**命题 3.21.** 当 $L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_p$ 时, (1)条件3.4.2、条件3.4.3相互等价。(2)条件3.4.4蕴含了条件3.4.3。(3)条件3.4.2是条件3.4.1的必要条件。

证明: 下面都假设 $L_1 \geq L_2 \geq \cdots \geq L_p \geq 0$ 。

**条件3.4.2**  $\Rightarrow$  **条件3.4.3** 如若不然, 则差分不等式(3.159)必有某组正解  $\{x_t\}$  单调不减趋于  $\infty$ 。因此

$$\begin{aligned} x_{t+1} &\leq d + L_1(x_t - x_{t-1}) + L_2(x_{t-1} - x_{t-2}) + \cdots + L_p(x_{t-p+1} - x_{t-p}) \\ &= d + L_1x_t - (L_1 - L_2)x_{t-1} - \cdots - (L_{p-1} - L_p)x_{t-p+1} - L_px_{t-p}, \end{aligned} \quad (3.162)$$

上式两边同除  $x_t$ , 并令  $\xi_i = \frac{x_i}{x_{i-1}}$ , 则得

$$\xi_{t+1} \leq L_1 - \frac{L_1 - L_2}{\xi_t} - \cdots - \frac{L_{p-1} - L_p}{\xi_t \xi_{t-1} \cdots \xi_{t-p+2}} - \frac{L_p}{\xi_t \xi_{t-1} \cdots \xi_{t-p+1}} + \frac{d}{x_t}. \quad (3.163)$$

由数列上极限的性质,

$$\begin{aligned} \limsup(a_n + b_n) &\leq \limsup a_n + \limsup b_n \quad (a_n \in \mathcal{R}, b_n \in \mathcal{R},) \\ \limsup(a_n b_n) &\leq \limsup a_n \cdot \limsup b_n \quad (a_n \geq 0, b_n \geq 0), \end{aligned} \quad (3.164)$$

并注意到  $x_t \uparrow \infty$ , 可得

$$\begin{aligned} \limsup \xi_{t+1} &\leq L_1 - \frac{L_1 - L_2}{\limsup \xi_t} - \cdots - \frac{L_{p-1} - L_p}{\limsup(\xi_t \xi_{t-1} \cdots \xi_{t-p+2})} - \frac{L_p}{\limsup(\xi_t \xi_{t-1} \cdots \xi_{t-p+1})} \\ &\leq L_1 - \frac{L_1 - L_2}{\limsup \xi_t} - \cdots - \frac{L_{p-1} - L_p}{\limsup \xi_t \limsup \xi_{t-1} \cdots \limsup \xi_{t-p+2}} - \frac{L_p}{\limsup \xi_t \limsup \xi_{t-1} \cdots \limsup \xi_{t-p+1}}. \end{aligned} \quad (3.165)$$

显然  $\lambda \triangleq \limsup \xi_{t+1} = \limsup \xi_t = \cdots = \limsup \xi_{t-p+1}$ , 于是有

$$\lambda \leq L_1 - \frac{L_1 - L_2}{\lambda} - \cdots - \frac{L_{p-1} - L_p}{\lambda^{p-1}} - \frac{L_p}{\lambda^p}, \quad (3.166)$$

即

$$\lambda^{p+1} - L_1 \lambda^p - (L_2 - L_1) \lambda^{p-1} - \cdots - (L_p - L_{p-1}) \lambda + L_p \leq 0. \quad (3.167)$$

这与条件3.4.2矛盾。

**条件3.4.3**  $\Rightarrow$  **条件3.4.2** 只须证条件3.4.2不成立时条件3.4.3也不成立。条件3.4.2不成立意味着存在  $\lambda \in (1, L_1)$ , 使得  $P_{\text{sym}}(\lambda) \leq 0$ 。而  $P_{\text{sym}}(1) = 1 > 0$ , 所以存在  $\bar{\lambda} \in (1, \lambda)$ , 使  $P_{\text{sym}}(\bar{\lambda}) = 0$ 。取初始条件  $x_{-k} = \bar{\lambda}^{-k}, k = 0, 1, \cdots, p$ , 则由数学归纳法及  $P_{\text{sym}}(\bar{\lambda}) = 0, \bar{\lambda} > 1$  容易证明差分方程

$$x_{t+1} = L_1|x_t - x_{t-1}| + L_2|x_{t-1} - x_{t-2}| + \cdots + L_p|x_{t-p+1} - x_{t-p}| \quad (3.168)$$

的解为  $x_t = \bar{\lambda}^t, \forall t > 0$ 。序列  $\{x_t\}$  显然也是差分不等式(3.159)的一组解, 但  $t \rightarrow \infty$  时  $x_t = \bar{\lambda}^t \uparrow \infty$ , 与条件3.4.3矛盾!



**条件3.4.4 $\Rightarrow$ 条件3.4.3** 如若不然, 则差分不等式(3.159) 有一组正解 $\{x_t\}$ 单调不减趋于无穷。对该序列, 根据条件3.4.4中 $i_t$ 的定义, 序列 $\{x_t\}$ 也是差分不等式(3.160)的一组正解, 与条件3.4.4矛盾! 从而, 条件3.4.4蕴含3.4.3。

**条件3.4.1 $\Rightarrow$ 条件3.4.2** 只须证条件3.4.2不成立时条件3.4.1也不成立。事实上, 条件3.4.2不成立时, 存在 $\bar{\lambda} \in (1, \lambda]$ , 使 $P_{\text{sym}}(\bar{\lambda}) = 0$ 。这时类似“条件3.4.3 $\Rightarrow$ 条件3.4.2”的证明, 取初始条件 $x_{-k} = \bar{\lambda}^{-k}, k = 0, 1, \dots, p$ , 就可证条件3.4.1不成立。  $\square$

### 注3.4.3.

以上证明了条件3.4.1、条件3.4.2、条件3.4.3、条件3.4.4之间的一些关系。计算机数值计算表明, 当 $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_p$ 时, 所有这些条件似乎都是等价的, 因为 $p = 2$ 时根据这些条件计算出的 $(L_1, L_2)$ 的区域几乎完全一样(因篇幅所限, 具体计算方法在此略去)。但这一猜测理论上还未完全证明。

下面给出一些较强的但可直接验证的充分条件:

### 条件3.4.5.

矩阵 $A$ 的谱半径 $\rho(A) < 1$ , 其中 $A = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_{p-1} & L_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### 条件3.4.6.

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_p < 1.$$

**命题 3.22.** (1)条件3.4.5是条件3.4.1和3.4.2的充分条件。(2)条件3.4.5等价于条件3.4.6。

证明:

**条件3.4.5 $\Rightarrow$ 条件3.4.1** 设 $\{x_t\}$ 为差分不等式(3.139)的任意正解, 记 $X_t = (|x_t|, |x_{t-1}|, \dots, |x_{t-p+1}|)^T$ , 我们试图分析 $X_t$ 与 $X_{t+1}$ 的联系。由不等式(3.139), 对任意 $i < t$ , 我们有

$$|x_{t+1}| \leq L_1|x_t - x_i| + L_2|x_{t-1} - x_{i-1}| + \cdots + L_p|x_{t-p+1} - x_{i-p+1}| + d, \quad (3.169)$$

所以,

$$|x_{t+1}| \leq L_1|x_t| + L_2|x_{t-1}| + \cdots + L_p|x_{t-p+1}| + s_t, \quad (3.170)$$

其中

$$s_t = \min_{i < t} (L_1|x_i| + L_2|x_{i-1}| + \cdots + L_p|x_{i-p+1}|) + d. \quad (3.171)$$

综上所述可得,

$$X_{t+1} \leq AX_t + S_t, \quad (3.172)$$

其中记号  $Y \leq Z$  表示向量  $Y$  的每个分量小于等于  $Z$  的相应分量, 这里矩阵  $A$  在条件 3.4.5 中定义, 且  $S_t = (s_t, 0, \cdots, 0)^T$ . 由  $s_t$  的定义, 显然  $s_t$  为单调不增序列, 从而  $S_t$  必有界. 于是由不等式 (3.172) 知, 如果矩阵  $A$  的谱半径  $\rho(A) < 1$ , 则序列  $X_t$  有界.

**条件 3.4.6  $\Rightarrow$  条件 3.4.5** 在条件 3.4.6 下, 显然条件 3.4.5 中定义的矩阵  $A$  为次随机矩阵 (非负、行和均不超过 1、某一行和小于 1), 根据次随机矩阵的性质 [95] 必有  $A$  的谱半径  $\rho(A) < 1$ .

**条件 3.4.5  $\Rightarrow$  条件 3.4.6** 由条件 3.4.5, 矩阵  $A$  是 Schur 稳定的, 这等价于对复平面上单位圆外的任意复数  $z$ , 都有  $A(z) \neq 0$ , 其中多项式  $A(z)$  定义为

$$A(z) \triangleq z^p - L_1z^{p-1} - L_2z^{p-2} - \cdots - L_{p-1}z - L_p. \quad (3.173)$$

注意到  $z$  取充分大实数时  $A(z) > 0$ , 故条件 3.4.5 成立时, 必有对任意的  $z \geq 1$ ,  $A(z) > 0$ . 特别地,  $A(1) = 1 - L_1 - L_2 - \cdots - L_p > 0$ . 即条件 3.4.6 成立.

**条件 3.4.5  $\Rightarrow$  条件 3.4.2** 容易验证  $(z-1)A(z) + z^p = P_{sym}(z)$ , 从而对任意  $z > 1$ ,  $A(z) > 0$  蕴含了  $P_{sym}(z) > 0$ . 即条件 3.4.2 成立.  $\square$

### 3.5 本章小结

反馈是自动控制领域的基本概念, 其作用主要是对付系统中的各种不确定性, 因此关于反馈能力和极限问题的研究具有根本的重要性. 在这一方向上, [116] 研究了具有结构不确定性的一阶系统, 其不确定性由单个 Lipschitz 常数来刻画, 给出了由一个临界数值  $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$  完全表征的反馈机制的能力与极限; 文献 [121] 是 [116] 工作的重要推广, 它研究了具有结构不确定性的高阶系统, 其不确定性仍由单个 Lipschitz 常数来刻画, 得到了一个不可能性结果.

本章的贡献是把[116]和[121]中的一些结果推广到具有结构不确定性的高阶系统，其不确定性由多个Lipschitz常数来刻画，主要得到了一些不可能性定理，计算机数值计算表明这些结果可能是充分必要的，但理论上还没能得到完全证明。

在本章中，提出来一些关于差分方程的新的基本问题，并且也得出了一些有意义的理论和仿真结果，但有些仿真结果还缺少严格证明。我们的研究表明反馈控制的能力极限和差分方程/不等式方面有紧密联系，这些问题同时对差分方程/不等式的理论研究提出了一些待解决的问题。

## 第四章 参数未知情形—高阶非线性高斯噪声模型

本章考虑一个具有参数不确定性和高斯白噪声干扰的高阶离散时间非线性系统，系统的非线性程度可用一组指标 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ 来刻画，给出了一个关于这些指标的代数条件，证明了在该条件下，任何控制律都不能使系统全局镇定。本章中的不可能性定理是对已有一阶参数不确定系统研究的继续，对类似的高阶系统给出了一个尝试，该结果表明在一定条件下，系统的一阶主项所对应的一个多项式决定了该系统反馈机制的极限。

### 4.1 已有结果

与上一章不同，本章将讨论一类具有未知参数的离散时间非线性系统，不过未知参数本身的作用方式仍是线性的。关于含有未知参数的线性系统（或接近线性的系统），一直是传统自适应控制的核心研究课题，已经有了广泛而深入的研究，在这一方面，已有了大量深刻而细致的工作，使得具有未知参数的线性系统的自适应控制的稳定性问题得到了较为圆满的解决（参看专著[21]及其中的大量文献）。本章中我们将看到，对于含参的非线性系统（即使关于参数是线性的），情况将大不相同，系统的非线性到了一定程度后会出现任意反馈控制律不能对付参数不确定性的情况。

前几章已提到，在反馈机制能力极限这一方向上，一个较早的研究结果见于文献[42]（1997年）。在该文中，作者研究了如下的一阶非线性离散时间系统：

$$y_{t+1} = \theta y_t^b + u_t + w_{t+1}, \quad b > 0,$$

其中 $\theta$ 为未知参数，指标 $b$ 刻画了系统的非线性程度， $\{w_t\}$ 为高斯白噪声，并证明了该系统具有“临界”稳定性：当 $b < 4$ 时，系统能够全局镇定；而当 $b \geq 4$ 时任何控制律都不能使系统全局镇定。可以注意到这一系统关于未知参数 $\theta$ 是线性的，非线性仅仅出现在回归部分 $y_t^b$ ，控制项及噪声项也是可加的，所以这一系统看起来非常简单。然而，对这样简单的系统， $b = 4$ 作为一个不平凡的临界数值，明显地揭示了对于离散时间非线性系统，自适应控制的一个能力极限。对于类似的连续时间非线性控制系统，并没有相应的不可能性结果，这进一步反映了离散时间自适应控制可能的特有困难（见[42, 57]）。

在文献[113]中,研究了更广泛的一阶非线性离散时间系统:

$$y_{t+1} = \theta_1 y_t^{b_1} + \theta_2 y_t^{b_2} + \cdots + \theta_n y_t^{b_n} + u_t + w_{t+1},$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 为未知参数,指标组 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 一起刻画了系统的非线性程度, $\{w_t\}$ 仍为高斯白噪声。文章中证明了在一定假设下,若不等式 $P(z) < 0$ 在 $z \in (1, b_1)$ 上有解,其中多项式

$$P(z) = z^{n+1} - b_1 z^n + (b_1 - b_2) z^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - b_n) z + b_n, \quad (4.1)$$

则不存在使系统全局镇定的反馈控制律。

最近,在文献[69]里研究的系统形式上和[113]中的系统完全一样,但假设 $\{w_t\}$ 是任意有界噪声,而未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 位于已知的参数区间内。对此系统,文章中证明了系统能鲁棒镇定的充要条件是 $P(z) > 0, \forall z \in (1, b_1)$ ;这里多项式 $P(z)$ 同上。

在以上的工作中,研究的系统都是一阶非线性离散时间系统。那么,对高阶的类似系统,反馈机制的能力极限是什么?针对这一问题,文献[77]对一个二阶离散时间系统进行了研究,并给出了一个简单的多项式判据,证明了在该多项式条件下任意反馈控制器都不能使系统镇定。

本章的目的就是将上述反面(不可能性)结果进一步推广到更一般的高阶离散时间系统。正面的结果目前在理论上还未证明,由于其本身的难度,有待今后进一步探索。

## 4.2 问题描述

考虑如下离散时间非线性多项式回归模型:

$$y_{t+1} = \theta_1 y_t^{b_1} + \theta_2 y_{t-1}^{b_2} + \cdots + \theta_n y_{t-n+1}^{b_n} + u_t + w_{t+1} \quad (4.2)$$

其中 $y_t$ 为系统的输出, $u_t$ 为系统的输入(控制), $w_t$ 为噪声干扰, $\theta_i (i = 1, 2)$ 为未知的参数。

本章中将作如下假设:

(A1) 未知参数向量 $\theta \triangleq (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)^T$ 服从高斯分布,且与噪声 $\{w_t\}$ 独立;

(A2) 噪声 $\{w_t\}$ 为服从标准正态分布 $N(0; 1)$ 的白噪声序列。

在以上假设下,我们要研究系统(4.2)的全局镇定性。首先,我们给出如下全局镇定性的严格定义:

**定义 4.1.** 设  $\mathcal{F}_t^y \triangleq \sigma\{y_i; 0 \leq i \leq t\}$  为由观测历史生成的  $\sigma$ -代数。如果存在反馈控制律  $u_t \in \mathcal{F}_t^y$  使系统对任意初始条件都有

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^2 < \infty. \quad a.s. \quad (4.3)$$

则我们称系统(4.2)能够全局镇定。

### 4.3 反面结果

#### 4.3.1 反面—主要结果

为方便起见,我们对  $b_1 > 1, b_2 \geq 0, \dots, b_n \geq 0$  引入如下条件:

**条件4.3.1.**

不等式  $P_1(z) < 0$  在区间  $(\max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}}), b_1)$  上有一实数解  $\lambda$ , 其中多项式

$$P_1(z) \triangleq z^2 - b_1 z + b_1. \quad (4.4)$$

**注4.3.1.**

条件中的区间  $(\max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}}), b_1)$  可换为  $(\max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}}), +\infty)$ , 两者等价。事实上, 如果  $\lambda \in (\max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}}), +\infty)$  满足

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - b_1 \lambda + b_1 = \lambda(\lambda - b_1) + b_1 < 0 \quad (4.5)$$

则显然有

$$\lambda - b_1 = \frac{P_1(\lambda) - b_1}{\lambda} < 0. \quad (4.6)$$

**注4.3.2.**

当  $b_1 > b_2 > \dots > b_n$  时, 上述条件4.3.1中的区间就变为  $(1, b_1)$ ; 这时条件4.3.1同文献[42]中的条件完全一致, 对应于  $b_1 > 4$ , 因此与[42]中的不可能性定理相一致(系统(4.2)还多了其它非线性项)。

**定理 4.1.** 在假设(A1)-(A2)下, 如果条件4.3.1成立, 则系统(4.2)不能够全局镇定, 也就是说, 使得系统(4.2)全局稳定的反馈控制器不存在。

### 4.3.2 反面一定理证明

#### 1. 一些引理

在以下的引理中, 我们将记

$$\eta_t \triangleq \frac{\log |y_{t+1}|}{\log |y_t|}, \quad (4.7)$$

于是对任意  $0 \leq i < t$  显然有

$$\xi(i, t) \triangleq \frac{\log |y_t|}{\log |y_i|} = \prod_{j=i}^{t-1} \eta_j, \quad (4.8)$$

从而

$$|y_t| = |y_i|^{\xi(i, t)} = |y_i|^{\prod_{j=i}^{t-1} \eta_j}. \quad (4.9)$$

即

$$|y_i| = |y_t|^{\frac{1}{\prod_{j=i}^{t-1} \eta_j}}. \quad (4.10)$$

在下文中, 为方便起见,  $|y|^a$  将被简记为  $y^a$ 。

如下的引理是显然成立的:

**引理 4.2.** 设  $\lambda > 1$  为某个常数. 若对  $i = 0, 1, \dots, t-1$  都有  $\eta_i \geq \lambda$ , 则  $t \rightarrow \infty$  时  $|y_t|$  单调趋于  $\infty$  且

$$\lambda^t = O(\log |y_t|). \quad (4.11)$$

下面的引理在本章中起着基本而重要的作用, 是后几个引理的基础:

**引理 4.3.** 设  $t > t', a > 1, a' > 1, m$  为自然数. 若对任意  $i < t$ , 有  $\eta_i > \sqrt[m]{\max(1, \frac{a'}{a})}$ , 则当  $t$  充分大时,

$$\begin{vmatrix} y_t^a & y_{t-m}^{a'} \\ y_{t'}^a & y_{t'-m}^{a'} \end{vmatrix} \sim y_t^a y_{t'-m}^{a'}; \quad y_{t'}^a y_{t-m}^{a'} = o(y_t^a y_{t'-m}^{a'}). \quad (4.12)$$

证: 记  $c = \sqrt[m]{\max(1, \frac{a'}{a})}$ , 由条件可得

$$\begin{aligned} & \left( a + \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}} \right) - \left( \frac{a}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t'}} + \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}} \right) \\ &= a \left( 1 - \frac{1}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t'}} \right) - \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}} \left( 1 - \frac{1}{\eta_{t-m-1}\eta_{t-m-2}\cdots\eta_{t'-m}} \right) \\ &> a \left( 1 - \frac{1}{c^{t-t'}} \right) - \frac{a'}{c^m} \left( 1 - \frac{1}{c^{t-t'}} \right) \\ &> 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

所以

$$a + \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}} > \frac{a}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t'}} + \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}}. \quad (4.14)$$

由 $\eta_i > 1$ , 且由引理4.2,  $t$ 充分大时,  $c^t = O(\log |y_t|)$ 。从而注意到

$$\begin{aligned} y_t^a y_{t-m}^{a'} &= y_t^{a + \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}}}, \\ y_{t'}^a y_{t-m}^{a'} &= y_t^{\frac{a}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t'}} + \frac{a'}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-m}}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

故引理得证。  $\square$

**引理 4.4.** 设自然数 $k_1 > k_2 > k_3$ , 非负整数 $m_1 < m_2 < m_3$ , 常数 $a_1, a_2, a_3 > 1$ , 且对任意 $i < k_1$ ,

$$\eta_i > \max(1, \sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_2}{a_1}}, \sqrt[m_3-m_1]{\frac{a_3}{a_1}}, \sqrt[m_3-m_2]{\frac{a_3}{a_2}}). \quad (4.16)$$

则当 $k_1, k_2, k_3$ 充分大时, 行列式

$$\begin{vmatrix} y_{k_1-m_1}^{a_1} & y_{k_1-m_2}^{a_2} & y_{k_1-m_3}^{a_3} \\ y_{k_2-m_1}^{a_1} & y_{k_2-m_2}^{a_2} & y_{k_2-m_3}^{a_3} \\ y_{k_3-m_1}^{a_1} & y_{k_3-m_2}^{a_2} & y_{k_3-m_3}^{a_3} \end{vmatrix} \sim y_{k_1-m_1}^{a_1} y_{k_2-m_2}^{a_2} y_{k_3-m_3}^{a_3}; \quad (4.17)$$

而且上述行列式的展开式中除主对角线乘积 $y_{k_1-m_1}^{a_1} y_{k_2-m_2}^{a_2} y_{k_3-m_3}^{a_3}$ 外的所有其它项都是主对角线乘积的高阶无穷小。

证: 记

$$c = \max(1, \sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_2}{a_1}}, \sqrt[m_3-m_1]{\frac{a_3}{a_1}}, \sqrt[m_3-m_2]{\frac{a_3}{a_2}}). \quad (4.18)$$

为计算引理中的行列式(不妨记为 $D_3$ ), 只需将其按第一行展开, 即

$$D_3 = y_{k_1-m_1}^{a_1} \begin{vmatrix} y_{k_2-m_2}^{a_2} & y_{k_2-m_3}^{a_3} \\ y_{k_3-m_2}^{a_2} & y_{k_3-m_3}^{a_3} \end{vmatrix} - y_{k_1-m_2}^{a_2} \begin{vmatrix} y_{k_2-m_1}^{a_1} & y_{k_2-m_3}^{a_3} \\ y_{k_3-m_1}^{a_1} & y_{k_3-m_3}^{a_3} \end{vmatrix} + y_{k_1-m_3}^{a_3} \begin{vmatrix} y_{k_2-m_1}^{a_1} & y_{k_2-m_2}^{a_2} \\ y_{k_3-m_1}^{a_1} & y_{k_3-m_2}^{a_2} \end{vmatrix}. \quad (4.19)$$

显然 $c^{m_3-m_2} > \max(1, \frac{a_3}{a_2})$ 。于是由引理4.3, 对充分大的 $k_2, k_3$ ,

$$\begin{vmatrix} y_{k_2-m_2}^{a_2} & y_{k_2-m_3}^{a_3} \\ y_{k_3-m_2}^{a_2} & y_{k_3-m_3}^{a_3} \end{vmatrix} \sim y_{k_2-m_2}^{a_2} y_{k_3-m_3}^{a_3}; \quad (4.20)$$

类似地,

$$\begin{vmatrix} y_{k_2-m_1}^{a_1} & y_{k_2-m_3}^{a_3} \\ y_{k_3-m_1}^{a_1} & y_{k_3-m_3}^{a_3} \end{vmatrix} \sim y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_3}^{a_3}; \quad (4.21)$$



$$\begin{vmatrix} y_{k_2-m_1}^{a_1} & y_{k_2-m_2}^{a_2} \\ y_{k_3-m_1}^{a_1} & y_{k_3-m_2}^{a_2} \end{vmatrix} \sim y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_2}^{a_2}. \quad (4.22)$$

于是

$$D_3 = I_1[1 + o(1)] - I_2[1 + o(1)] + I_3[1 + o(1)] \quad (4.23)$$

其中

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{k_1-m_1}^{a_1} y_{k_2-m_2}^{a_2} y_{k_3-m_3}^{a_3}, \\ I_2 &= y_{k_1-m_2}^{a_2} y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_3}^{a_3}, \\ I_3 &= y_{k_1-m_3}^{a_3} y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_2}^{a_2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

下面我们只需比较 $I_1, I_2, I_3$ 。由于 $c^{m_2-m_1} > \max(1, \frac{a_2}{a_1})$ ，根据引理4.3，当 $k_1, k_2, k_3$ 充分大时，

$$y_{k_1-m_2}^{a_2} y_{k_2-m_1}^{a_1} = o(y_{k_1-m_1}^{a_1} y_{k_2-m_2}^{a_2}), \quad (4.25)$$

于是 $I_2 = o(I_1)$ 。类似地，

$$y_{k_1-m_3}^{a_3} y_{k_3-m_2}^{a_2} = o(y_{k_1-m_2}^{a_2} y_{k_3-m_3}^{a_3}), \quad (4.26)$$

于是 $I_3 = o(I_2) = o(I_1)$ 。综上，可得

$$D_3 = I_1[1 + o(1)] - I_2[1 + o(1)] + I_3[1 + o(1)] = I_1 + o(I_1), \quad (4.27)$$

同时 $D_3$ 的展开式中除去 $I_1$ 的所有项都是 $I_1$ 的高阶无穷小。引理得证。  $\square$

**引理 4.5.** 设自然数 $k_1 > k_2 > \cdots > k_n$ ，非负整数 $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ ，常数 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 1$ ，且对任意 $i < k_1$ ，

$$\eta_i > \max(1, {}^{m_2-m_1}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}, {}^{m_3-m_2}\sqrt{\frac{a_3}{a_2}}, \cdots, {}^{m_n-m_{n-1}}\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}). \quad (4.28)$$

则当 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 充分大时，行列式

$$\begin{vmatrix} y_{k_1-m_1}^{a_1} & y_{k_1-m_2}^{a_2} & \cdots & y_{k_1-m_n}^{a_n} \\ y_{k_2-m_1}^{a_1} & y_{k_2-m_2}^{a_2} & \cdots & y_{k_2-m_n}^{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k_3-m_1}^{a_1} & y_{k_3-m_2}^{a_2} & \cdots & y_{k_3-m_n}^{a_n} \end{vmatrix} \sim y_{k_1-m_1}^{a_1} y_{k_2-m_2}^{a_2} y_{k_n-m_n}^{a_n}; \quad (4.29)$$

而且上述行列式的展开式中除主对角线乘积 $y_{k_1-m_1}^{a_1} y_{k_2-m_2}^{a_2} \cdots y_{k_n-m_n}^{a_n}$ 外的所有其它项都是主对角线乘积的高阶无穷小。

证：我们用数学归纳法。从引理4.3、引理4.4知，命题对  $n = 2, 3$  成立。下面假设命题对  $n = 2, 3, \dots, p-1$  都成立，在这一前提下来证对  $n = p$  也成立。为方便起见，记命题中形状的行列式为

$$D_n(k_1, k_2, \dots, k_n; m_1, m_2, \dots, m_n; a_1, a_2, \dots, a_n).$$

在不引起歧义的情况下，为方便起见，上式将简记为  $D_n$ 。

第一步：由Laplace定理，

$$D_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} y_{k_1-m_i}^{a_i} C_i \quad (4.30)$$

其中  $C_i$  表示行列式  $D_n$  中元素  $y_{k_1-m_i}^{a_i}$  的余子式。注意到  $C_i$  仍然是形如  $D_n$  的  $p-1$  阶行列式，于是根据归纳假设，当  $k_1, k_2, \dots, k_n$  充分大时，

$$C_i \sim y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_2}^{a_2} \cdots y_{k_i-m_{i-1}}^{a_{i-1}} \times y_{k_{i+1}-m_{i+1}}^{a_{i+1}} y_{k_{i+2}-m_{i+2}}^{a_{i+2}} \cdots y_{k_n-m_n}^{a_n}. \quad (4.31)$$

因此只需比较

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{k_1-m_1}^{a_1} \times y_{k_2-m_2}^{a_2} \cdots y_{k_n-m_n}^{a_n}, \\ I_2 &= y_{k_1-m_2}^{a_2} \times y_{k_2-m_1}^{a_1} \times y_{k_3-m_3}^{a_3} \cdots y_{k_n-m_n}^{a_n}, \\ I_3 &= y_{k_1-m_3}^{a_3} \times y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_2}^{a_2} \times y_{k_4-m_4}^{a_4} \cdots y_{k_n-m_n}^{a_n}, \\ &\vdots \\ I_{n-1} &= y_{k_1-m_{n-1}}^{a_{n-1}} \times y_{k_2-m_1}^{a_1} \cdots y_{k_{n-1}-m_{n-2}}^{a_{n-2}} \times y_{k_n-m_n}^{a_n}, \\ I_n &= y_{k_1-m_n}^{a_n} \times y_{k_2-m_1}^{a_1} \cdots y_{k_n-m_{n-1}}^{a_{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

第二步：当  $2 \leq i \leq n-1$  时， $I_1$  和  $I_i$  有公共因子

$$J_{1,i} \triangleq y_{k_{i+1}-m_{i+1}}^{a_{i+1}} \cdots y_{k_n-m_n}^{a_n}, \quad (4.33)$$

除去该公共因子，两式余下的部分恰为一个  $i$  阶行列式

$$D_i(k_1, \dots, k_i; m_1, \dots, m_i; a_1, \dots, a_i)$$

展开式中的主对角线乘积及另外一项。由归纳假设，当  $k_1, k_2, \dots, k_i$  充分大时，

$$\frac{I_i}{J_{1,i}} = o\left(\frac{I_1}{J_{1,i}}\right), \quad (4.34)$$

故有  $I_i = o(I_1)$ 。

第三步：下面考虑 $I_n$ 。 $I_n$ 和 $I_1$ 不能直接比较，但 $I_n$ 和 $I_{n-1}$ 有公因子

$$J_{n-1,n} \triangleq y_{k_2-m_1}^{a_1} y_{k_3-m_2}^{a_2} \cdots y_{k_{n-1}-m_{n-2}}^{a_{n-2}}. \quad (4.35)$$

余下的因子分别为

$$\begin{aligned} \frac{I_n}{J_{n-1,n}} &= y_{k_n-m_{n-1}}^{a_{n-1}} y_{k_1-m_n}^{a_n}, \\ \frac{I_{n-1}}{J_{n-1,n}} &= y_{k_1-m_{n-1}}^{a_{n-1}} y_{k_n-m_n}^{a_n}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

从而由引理4.3,  $k_1, k_n$ 充分大时,

$$\frac{I_n}{J_{n-1,n}} = o\left(\frac{I_{n-1}}{J_{n-1,n}}\right), \quad (4.37)$$

从而 $I_n = o(I_{n-1})$ 。

综上可知引理成立。  $\square$

**引理 4.6.** 设

$$\begin{aligned} \phi_i &= (y_i^{b_1}, y_{i-1}^{b_2}, \cdots, y_{i-n+1}^{b_n})^\tau, \\ D_t &= \det\left(\sum_{i=1}^t \phi_i \phi_i^\tau\right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

若 $\eta_i > \max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \cdots, \frac{b_n}{b_{n-1}})$ , 则

$$D_t = Z_t(1 + \gamma_t), \quad (4.39)$$

其中

$$Z_t = y_t^{2b_1} y_{t-2}^{2b_2} \cdots y_{t-2n+2}^{2b_n} = y_t^{2b_1 + \frac{2b_2}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}} + \cdots + \frac{2b_n}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\cdots\eta_{t-2n+1}\eta_{t-2n}}}, \quad (4.40)$$

且当 $t$ 充分大时 $\gamma_t = o(1)$ 。

证：当 $1 \leq i \leq t+1$ 时，记

$$\alpha_m(i) \triangleq [y_{i-1}^{b_1} y_{i-m}^{b_m}, y_{i-2}^{b_2} y_{i-m}^{b_m}, \cdots, y_{i-n}^{b_n} y_{i-m}^{b_m}]^\tau, \quad (4.41)$$

并约定 $\alpha_m(0) = \mathbf{e}_m$ , 即为单位阵 $I_n$ 的第 $m$ 列。则

$$D_t = \det\left(\sum_{i=0}^{t+1} \alpha_1(i), \sum_{i=-1}^t \alpha_2(i), \cdots, \sum_{i=-1}^t \alpha_n(i)\right). \quad (4.42)$$

由行列式展开的Laplace定理，可得

$$D_t = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{t+1} \det(\alpha_1(i_1), \alpha_2(i_2), \cdots, \alpha_n(i_n)). \quad (4.43)$$

记

$$D(i_1, i_2, \dots, i_n) \triangleq \det(\alpha_1(i_1), \alpha_2(i_2), \dots, \alpha_n(i_n)). \quad (4.44)$$

显然, 当  $i_m = i_{m'} \neq 0$  时, 向量  $\alpha_m(i_m)$  与  $\alpha_{m'}(i_{m'})$  线性相关, 从而当  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  中有两个数相等 (但不等于 0) 时, 有  $D(i_1, i_2, \dots, i_n) = 0$ . 所以我们下面不再考虑这样的项。

下面我们考虑充分大的  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , 假设  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  是  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$  的一个排列。

注意到行列式  $D(i_1, i_2, \dots, i_n)$  的每一列元素有公因子  $y_{i_m-m}^{b_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , 因此根据行列式的性质, 可把这些公因子提出来, 即得

$$D(i_1, i_2, \dots, i_n) = \prod_{m=1}^n y_{i_m-m}^{b_m} \times D'(i_1, i_2, \dots, i_n), \quad (4.45)$$

其中

$$D'(i_1, i_2, \dots, i_n) = \begin{vmatrix} y_{i_1-1}^{b_1} & y_{i_2-1}^{b_1} & \cdots & y_{i_n-1}^{b_1} \\ y_{i_1-2}^{b_2} & y_{i_2-2}^{b_2} & \cdots & y_{i_n-2}^{b_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i_1-n}^{b_n} & y_{i_2-n}^{b_n} & \cdots & y_{i_n-n}^{b_n} \end{vmatrix}. \quad (4.46)$$

情形1:  $i_1 > i_2 > \dots > i_n$ , 即  $i_j = t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )。注意到行列式  $D'(i_1, i_2, \dots, i_n)$  中的矩阵的转置恰有引理4.5中矩阵的形状, 并且由于  $i_1 > i_2 > \dots > i_n$ , 因此用引理4.5知, 当  $t_1, t_2, \dots, t_n$  充分大时,

$$D'(i_1, i_2, \dots, i_n) \sim y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n}; \quad (4.47)$$

而且行列式展开式中的其它所有项都是  $y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n}$  的高阶无穷小。于是

$$D(i_1, i_2, \dots, i_n) \sim \prod_{m=1}^n y_{t_m-m}^{b_m} \times y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n} = \prod_{m=1}^n y_{t_m-m}^{2b_m}. \quad (4.48)$$

情形2:  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  经过适当重排后成为  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ 。这时记排列  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  的乱序数为  $\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)$ , 则利用行列式的性质, 在这种情形下, 当  $t_1, t_2, \dots, t_n$  充分大时,

$$\begin{aligned} D(i_1, i_2, \dots, i_n) &= (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} D'(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &\sim (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \dots, i_n)} y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n}; \end{aligned} \quad (4.49)$$

并且行列式展开式中的所有其它项都是 $y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n}$ 的高阶无穷小。下面考虑项

$$I(i_1, i_2, \cdots, i_n) \triangleq \prod_{m=1}^n y_{i_m-m}^{b_m} = y_{i_1-1}^{b_1} y_{i_2-2}^{b_2} \cdots y_{i_n-n}^{b_n}. \quad (4.50)$$

显然 $I(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是行列式 $D'(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 展开式中不同于主对角线乘积 $y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n}$ 的一项, 于是根据情形1中的结论, 当 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 充分大时,

$$I(i_1, i_2, \cdots, i_n) = o\left(\prod_{m=1}^n y_{t_m-m}^{b_m}\right). \quad (4.51)$$

从而

$$\begin{aligned} D(i_1, i_2, \cdots, i_n) &= I(i_1, i_2, \cdots, i_n) \times D'(i_1, i_2, \cdots, i_n) \\ &= o\left(\prod_{m=1}^n y_{t_m-m}^{b_m}\right) \times (-1)^{\sigma(i_1, i_2, \cdots, i_n)} y_{t_1-1}^{b_1} y_{t_2-2}^{b_2} \cdots y_{t_n-n}^{b_n} \\ &= o\left(\prod_{m=1}^n y_{t_m-m}^{2b_m}\right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

故得

$$D(i_1, i_2, \cdots, i_n) = o(D(t_1, t_2, \cdots, t_n)). \quad (4.53)$$

根据上面的讨论, 若记

$$\mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_n) \triangleq \{(i_1, i_2, \cdots, i_n) : (i_1, i_2, \cdots, i_n) \text{ 为 } (t_1, t_2, \cdots, t_n) \text{ 的一个排列}\} \quad (4.54)$$

则当 $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$ 充分大时, 必有

$$\begin{aligned} &S(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ &\triangleq \sum_{(i_1, i_2, \cdots, i_n) \in \mathcal{P}(t_1, t_2, \cdots, t_n)} D(i_1, i_2, \cdots, i_n) \\ &= D(t_1, t_2, \cdots, t_n) + (n! - 1)o(D(t_1, t_2, \cdots, t_n)) \\ &\sim D(t_1, t_2, \cdots, t_n) \\ &\sim \prod_{m=1}^n y_{t_m-m}^{2b_m}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

下面来估计 $D_t$ 。显然有

$$D_t = \sum_{t+1 \geq t_1 > t_2 > \cdots > t_n \geq 0} S(t_1, t_2, \cdots, t_n) = I + I', \quad (4.56)$$

其中 $I$ 对应于项 $S(t+1, t, \dots, t-n+2)$ ,  $I'$ 对应于所有其它项的和。注意到 $I'$ 中最大的项为 $S(t+1, t, \dots, t-n+3, t-n+1)$ , 且 $I'$ 中的项不超过 $(t+1)^n$ 个, 因此当 $t$ 充分大时, 有

$$I = S(t+1, t, \dots, t-n+2) \sim y_t^{2b_1} y_{t-2}^{2b_2} y_{t-4}^{2b_3} \cdots y_{t-2n+4}^{2b_{n-1}} y_{t-2n+2}^{2b_n}, \quad (4.57)$$

$$|I'| \leq (t+1)^n S(t+1, t, \dots, t-n+3, t-n+1) \sim (t+1)^n y_t^{2b_1} y_{t-2}^{2b_2} y_{t-4}^{2b_3} \cdots y_{t-2n+4}^{2b_{n-1}} y_{t-2n+1}^{2b_n}. \quad (4.58)$$

于是

$$\left| \frac{I'}{I} \right| = O\left( \frac{(t+1)^n |y_{t-2n+1}|^{2b_n}}{|y_{t-2n+2}|^{2b_n}} \right) = O\left( \frac{(t+1)^n}{|y_{t-2n+1}|^{2b_n(\eta_{t-2n+1}-1)}} \right). \quad (4.59)$$

由于 $\eta_i = \frac{\log |y_{i+1}|}{\log |y_i|} > 1$ , 易知 $t$ 充分大时,

$$\frac{(t+1)^n}{|y_{t-2n+1}|^{2b_n(\eta_{t-2n+1}-1)}} = \exp\{n \log(t+1) - 2b_n(\eta_{t-2n+1} - 1) \log |y_{t-2n+1}|\} = o(1). \quad (4.60)$$

所以在 $t$ 充分大时有

$$D_t = I + I' = I(1 + o(1)) \sim I \sim y_t^{2b_1} y_{t-2}^{2b_2} \cdots y_{t-2n+2}^{2b_n}, \quad (4.61)$$

即 $D_t = Z_t(1 + \gamma_t)$ , 其中

$$Z_t = y_t^{2b_1} y_{t-2}^{2b_2} \cdots y_{t-2n+2}^{2b_n}, \gamma_t = o(1). \quad (4.62)$$

□

**引理 4.7.** 设序列 $v_t$ 满足 $|v_t| = O(\log t)$ 。若条件4.3.1成立, 即存在

$$\lambda \in (\max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}}), b_1) \quad (4.63)$$

满足 $P_1(\lambda) < 0$ , 其中多项式 $P_1(\lambda)$ 由(4.4)定义, 则在适当的初始条件下不等式

$$z_{t+1} \geq b_1 z_t - b_1 z_{t-1} + b_2 z_{t-2} - b_2 z_{t-3} + \cdots + b_n z_{t-2n+2} - b_n z_{t-2n+1} + v_t \quad (4.64)$$

的解 $\{z_t\}$ 满足

$$z_{s+1} \geq \lambda z_s, \forall s \geq 0. \quad (4.65)$$

证明: 设 $|v_t| \leq C \log(n+1)$ 。记 $e_k = z_k - \lambda z_{k-1}$ , 显然有 $z_k = e_k + \lambda z_{k-1}$ 。于是

$$\begin{aligned}
0 &\leq z_{t+1} - (b_1 z_t - b_1 z_{t-1} + b_2 z_{t-2} - b_2 z_{t-3} + \cdots + b_n z_{t-2n+2} - b_n z_{t-2n+1} + v_t) \\
&= e_{t+1} + (\lambda - b_1) z_t + b_1 z_{t-1} - b_2 z_{t-2} + b_2 z_{t-3} - \cdots - b_n z_{t-2n+2} + b_n z_{t-2n+1} - v_t \\
&= e_{t+1} + (\lambda - b_1) e_t + [(\lambda - b_1) \lambda + b_1] e_{t-1} \\
&\quad + \{[(\lambda - b_1) \lambda + b_1] \lambda - b_2\} z_{t-2} + b_2 z_{t-3} - \cdots - b_n z_{t-2n+2} + b_n z_{t-2n+1} - v_t \\
&= \quad \vdots \\
&\stackrel{\Delta}{=} e_{t+1} - K_1 e_t - K_2 e_{t-1} - K_3 e_{t-2} - K_4 e_{t-3} - \cdots - K_{2n-1} e_{t-2n+2} - K_{2n} z_{t-2n+1} - v_t,
\end{aligned} \tag{4.66}$$

其中

$$\begin{aligned}
K_1 &= -(\lambda - b_1) = b_1 - \lambda, \\
K_2 &= -[(\lambda - b_1) \lambda + b_1] = K_1 \lambda - b_1, \\
K_3 &= K_2 \lambda + b_2 > 0, \\
K_4 &= K_3 \lambda - b_2 = K_2 \lambda^2 + (b_2 \lambda - b_2), \\
&\quad \vdots \\
K_{2n-1} &= K_{2n-2} \lambda + b_n \\
K_{2n} &= K_{2n-1} \lambda - b_n = K_{2n-2} \lambda^2 + (b_n \lambda - b_n).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

注意到 $\lambda \in (1, b_1)$ ,  $P_1(\lambda) < 0$ ,  $b_2, b_3, \cdots, b_n \geq 0$ , 显然有

$$\begin{aligned}
K_1 &> 0, K_2 > 0, K_3 > K_2 \lambda > 0, K_4 > K_2 \lambda^2 > 0, \\
&\cdots, K_{2n-1} > K_{2n-2} \lambda > 0, K_{2n} = K_{2n-2} \lambda^2 > 0.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

且由(4.66)可得

$$e_{t+1} \geq K_1 e_t + K_2 e_{t-1} + K_3 e_{t-2} + K_4 z_{t-3} + \cdots + K_{2n-1} e_{t-2n+2} + K_{2n} e_{t-2n+1} + v_t \tag{4.69}$$

可以证明, 存在初始条件 $(z_0, z_1, z_2, \cdots, z_{2n-1}) \in \mathcal{R}^{2n}$ 使

$$e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, \cdots, e_{2n-1} \geq 0, K_{2n} z_0 + v_{2n-1} > 0. \tag{4.70}$$

事实上, 令

$$N = \arg \max_{t \geq 0} \frac{\log(t+1)}{\lambda^t}, \tag{4.71}$$

取

$$\begin{aligned}
 z_0 &\geq \frac{\lambda^{2n-1}NC}{K_{2n}}, \\
 z_1 &\geq \lambda z_0, \\
 z_2 &\geq \lambda z_1 \geq \lambda^2 z_0, \\
 &\vdots \\
 z_{2n-1} &\geq \lambda z_{2n-2} \geq \lambda^{2n-1} z_0,
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

则显然有

$$\begin{aligned}
 e_1 \geq 0, \quad e_2 \geq 0, \quad \dots, \quad e_{2n-1} \geq 0, \\
 K_{2n}z_0 + v_{2n-1} \geq \lambda^{2n-1}NC - |v_{2n-1}| \geq C \log(2n) - C \log(2n) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

在上述初始条件下, 接着由(4.69), 可得 $e_{2n} \geq 0$ , 于是 $z_{2n} \geq \lambda z_{2n-1} \geq \lambda^{2n} z_0$ 。且由 $N$ 的定义有

$$K_{2n}z_1 + v_{2n-3} \geq \lambda^{2n}NC - |v_{2n}| \geq C \log(2n+1) - C \log(2n+1) = 0.$$

下面设当 $s = 1, 2, \dots, t$ 时, 都有 $e_t \geq 0, z_s \geq \lambda z_{s-1}$ , 注意到

$$K_{2n}z_{t-2n+1} + v_t \geq \lambda^t NC - |v_t| \geq C \log(t+1) - C \log(t+1) = 0,$$

并由(4.69), 可知对 $s = t+1$ , 有 $e_{s+1} \geq 0, z_{s+1} \geq \lambda z_s$ 。故引理得证。  $\square$

## 2. 定理4.1的证明

我们只需证明: 在定理的条件下, 对任意的控制律 $u_t \in \mathcal{F}_t^y$ , 总存在适当的初始条件和一个具有正概率的集合 $\mathcal{D}$ , 使得在集合 $\mathcal{D}$ 上闭环系统的输出 $\{y_t\}$ 以超指数速度趋于无穷大。

考虑如下的状态空间模型( $t \geq 0$ ):

$$\begin{cases} \theta_{t+1} = \theta_t, & \theta_0 = \theta \\ y_{t+1} = \phi_t^\tau \theta_t + u_t + w_{t+1} \end{cases} \tag{4.74}$$

其中 $\theta$  是满足假设A1的参数向量,  $\phi_t = (y_t^{b_1}, y_{t-1}^{b_2}, \dots, y_{t-n+1}^{b_n})^\tau$ 。

由假设A1和A2以及 $u_t \in \mathcal{F}_t^y$ , 可知(4.74)是一个条件高斯模型, 因而条件期望 $\hat{\theta}_t = E[\theta | \mathcal{F}_t^y]$  可由Kalman滤波产生, 并且估计误差 $\tilde{\theta}_t \triangleq \theta - \hat{\theta}_t$ 的条件方差阵

$$P_t \triangleq E[\tilde{\theta}_t \tilde{\theta}_t^\tau | \mathcal{F}_t^y] \tag{4.75}$$



由如下Riccati 方程给出

$$P_{t+1} = P_t - \frac{P_t \phi_t \phi_t^T P_t}{1 + \phi_t^T P_t \phi_t}, P_0 = I. \quad (4.76)$$

由(4.74)可知,

$$y_{t+1} = \phi_t^T \tilde{\theta}_t + (\phi_t^T \hat{\theta}_t + u_t) + w_{t+1}. \quad (4.77)$$

从而, 注意到  $E[\tilde{\theta}_t | \mathcal{F}_t^y] = 0$  和  $E[w_{t+1} | \mathcal{F}_t^y] = 0$  以及(4.75), 可知对任意控制律  $u_t \in \mathcal{F}_t^y$ ,

$$E[y_{t+1}^2 | \mathcal{F}_t^y] = \phi_t^T P_t \phi_t + (\phi_t^T \hat{\theta}_t + u_t)^2 + 1 \geq \phi_t^T P_t \phi_t + 1. \quad (4.78)$$

进而由(4.76)和矩阵求逆公式, 可得

$$P_{t+1}^{-1} = P_t^{-1} + \phi_t \phi_t^T. \quad (4.79)$$

于是

$$\begin{aligned} |P_{t+1}^{-1}| &= |P_t^{-1} + \phi_t \phi_t^T| \\ &= |P_t^{-1}(I + P_t \phi_t \phi_t^T)| \\ &= |P_t^{-1}|(1 + \phi_t^T P_t \phi_t). \end{aligned} \quad (4.80)$$

从而由(4.78), 可得

$$E[y_{t+1}^2 | \mathcal{F}_t^y] \geq \frac{|P_{t+1}^{-1}|}{|P_t^{-1}|}, \forall t \geq 0. \quad (4.81)$$

记  $\beta_t = (t+1)^{5/2}$ . 定义

$$\mathcal{D} = \bigcap_{t=0}^{\infty} \{\omega : E[y_{t+1}^2 | \mathcal{F}_t^y] \leq \beta_t y_{t+1}^2\}. \quad (4.82)$$

由序列  $\{y_t\}$  的条件高斯性, 类似[42]中附录B中的证明, 可证  $Prob(\mathcal{D}) > 0$ . 从而由(4.82) 可知在正概率集合  $\mathcal{D}$  上有

$$y_{t+1}^2 \geq \frac{1}{\beta_t} \frac{|P_{t+1}^{-1}|}{|P_t^{-1}|}, \forall t \geq 0. \quad (4.83)$$

下面我们假设定理中条件成立, 即存在  $\lambda \in (\max(1, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{b_n}{b_{n-1}}), b_1)$  满足  $P_1(\lambda) < 0$ , 其中多项式  $P_1(\lambda)$  由(4.4)定义。我们将证明在适当的初值条件下, 在正概率集合  $\mathcal{D}$  上对  $t \geq 1$ ,

$$\eta_{t-1} = \frac{\log |y_t|}{\log |y_{t-1}|} \geq \lambda. \quad (4.84)$$

从而由引理4.2可知序列 $\{|y_t|\}$ 将以超指数速度发散到无穷。

我们采用数学归纳法来进行证明。首先考虑 $t = 1$ 的情形。由(4.79)和 $P_0 = I$ ，我们有

$$P_1^{-1} = P_0^{-1} + \phi_0 \phi_0^\tau > y_0^{2b_1}. \quad (4.85)$$

因此，联合(4.83) 和 $|y_0| > 1$ ， $|y_1| \geq \sqrt{\frac{P_1^{-1}}{P_0^{-1}}} > |y_0|^{b_1} > |y_0|^\lambda$ 。

下面假设对 $t = 1, 2, \dots, s$  都有 $|y_t| \geq |y_{t-1}|^\lambda$ ，即

$$\eta_{t-1} = \frac{\log |y_t|}{\log |y_{t-1}|} \geq \lambda.$$

这时由(4.79)，可得

$$P_{t+1}^{-1} = P_0^{-1} + \sum_{i=1}^t \phi_i \phi_i^\tau. \quad (4.86)$$

由引理4.6，我们有

$$|P_{t+1}^{-1}| = Z_t(1 + \gamma_t), \quad (4.87)$$

其中

$$Z_t = y_t^{2b_1 + \frac{2b_2}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}} + \dots + \frac{2b_n}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\dots\eta_{t-2n+1}\eta_{t-2n}}} , \gamma_t = o(1). \quad (4.88)$$

于是由(4.83)，可得

$$y_{t+1}^2 \geq \frac{1}{\beta_t} \frac{Z_t(1 + \gamma_t)}{Z_{t-1}(1 + \gamma_{t-1})} = \Gamma_t \cdot \frac{Z_t}{Z_{t-1}}, \quad (4.89)$$

其中

$$\Gamma_t = \frac{1 + \gamma_t}{(1 + \gamma_{t-1})\beta_t}. \quad (4.90)$$

因而

$$\begin{aligned} 2 \log |y_{t+1}| &\geq \log \Gamma_t + \log Z_t - \log Z_{t-1} \\ &= \log \Gamma_t + \left( 2b_1 + \frac{2b_2}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}} + \dots + \frac{2b_n}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\dots\eta_{t-2n+3}\eta_{t-2n+2}} \right) \log |y_t| \\ &\quad - \left( 2b_1 + \frac{2b_2}{\eta_{t-2}\eta_{t-3}} + \dots + \frac{2b_n}{\eta_{t-2}\eta_{t-3}\dots\eta_{t-2n+2}\eta_{t-2n+1}} \right) \log |y_{t-1}|. \end{aligned} \quad (4.91)$$

注意到 $\log |y_{t+1}| = \eta_t \log |y_t|$ ， $\log |y_t| = \eta_{t-1} \log |y_{t-1}|$ ，从而有

$$\begin{aligned} \eta_t &\geq \frac{\log \Gamma_t}{2 \log |y_t|} + \left( b_1 + \frac{b_2}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}} + \dots + \frac{b_n}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\dots\eta_{t-2n+3}\eta_{t-2n+2}} \right) \\ &\quad - \left( \frac{b_1}{\eta_{t-1}} + \frac{b_2}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\eta_{t-3}} + \dots + \frac{b_n}{\eta_{t-1}\eta_{t-2}\dots\eta_{t-2n+1}\eta_{t-2n+2}\eta_{t-2n+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.92)$$

两边同乘 $\xi(0, t) = \eta_0 \eta_1 \cdots \eta_{t-1}$ , 得

$$\begin{aligned} \xi(0, t+1) &\geq \frac{\log \Gamma_t}{2 \log |y_0|} + b_1 \xi(0, t) + b_2 \xi(0, t-2) + \cdots + b_n \xi(0, t-2n+2) \\ &\quad - b_1 \xi(0, t-1) - b_2 \xi(0, t-3) - \cdots - b_n \xi(0, t-2n+1). \end{aligned} \quad (4.93)$$

令 $z_k = \log |y_k| = \xi(0, k) \log |y_0|$ , 则有

$$z_{t+1} \geq \frac{\log \Gamma_t}{2} + b_1 z_t - b_1 z_{t-1} + b_2 z_{t-2} - b_2 z_{t-3} + \cdots + b_n z_{t-2n+2} - b_n z_{t-2n+1}. \quad (4.94)$$

由 $\Gamma_t$ 的定义, 易知 $|\log \Gamma_t| = O(\log t)$ 。从而由引理4.7, 在适当的初始条件下, 必有 $z_{s+1} \geq \lambda z_s$ 成立, 或等价地 $|y_{s+1}| \geq |y_s|^\lambda, \eta_{s+1} \geq \lambda$ 。

这样, 在适当的初始条件下, 在集合 $\mathcal{D}$ 上, 由归纳假设 $|y_t| \geq |y_{t-1}|^\lambda$  ( $t = 1, 2, \cdots, s$ ) 可以推出 $|y_{s+1}| \geq |y_s|^\lambda$ ; 于是归纳假设对 $t = s+1$ 也可以成立。因此, 在正概率集合 $\mathcal{D}$ 上, 对充分大的 $s \geq 1$ , 都有 $|y_{s+1}| \geq |y_s|^\lambda$ , 从而由引理4.2, 定理得证。□

### 4.3.3 反面—进一步讨论

**条件4.3.1可否进一步减弱?** 对这一问题目前还不能给出非常明确的回答, 从以下方面来说, 答案似乎是否定的: (1)从特殊情形来看, 该条件已对应于已知的临界点; (2)从分析技巧上看, 在本章证明的思路下, 改进的余地也不大;

但要从理论上完整回答这一问题, 还需要对正面结果的进一步探索, 它最后归结为一个非常复杂的I型含参迭代系统的稳定性研究, 为节省篇幅, 本章不再对此讨论。这方面目前还没有实质性的结果, 可以想见的是, 这一问题在数学上可能具有很大的难度。

**进一步的推广** 在本章中回归向量 $\phi_t$ 非常简单, 它被取为

$$\phi_t = (y_t^{b_1}, y_{t-1}^{b_2}, \cdots, y_{t-n+1}^{b_n})^\tau, \quad (4.95)$$

因此本章研究的高阶离散时间非线性系统仍属于比较简单的模型。基于本章的思想及技巧, 本章的结果可以进一步推广为更一般一些的情形:

$$\phi_t = (f_1(Y_t), f_2(Y_t), \cdots, f_n(Y_t))^\tau, \quad (4.96)$$

其中 $f_k(Y_t)$ 与 $y_{t-k+1}^{b_k}$ 的阶相当。为节省篇幅, 本章不再对此进一步讨论。有兴趣的读者可以参看[114]等文献获得一些类似的分析技巧。

**关于证明的思想以及基本假设** 假设A1和A2的引入是为了可以应用Kalman滤波得到条件期望 $\hat{\theta}_t = E[\theta|\mathcal{F}_t^y]$ , 而条件期望可以认为是我们用反馈控制 $u_t \in \mathcal{F}_t^y$ 可能得到的未知参数向量 $\theta$ 最好的估计。有了Kalman滤波, 才可以得到基本而关键的不等式(4.78), 它不依赖于任何控制律, 从而能设法给出 $y_{t+1}^2$ 的下界估计, 得到一个II型差分不等式, 最终给出本章的不可能性定理。本章以及文献[113]中结果的大体证明思路都还没有突破[42]中的原创性思想, 其困难之处更多地体现在寻找条件4.3.1和技术细节上。

由于这一思路需要用到Kalman滤波, 因此在理论分析上难以摆脱其限制, 即假设A1和A2并不容易去掉或减弱。这一方法的优点是可以分析高斯噪声(无界)的情形。最近, 文献[68]提出了另一套不同的思路分析类似的一阶参数未知非线性系统, 得到的结果类似于[113]的结果, 其方法得益于有界噪声及有界参数向量的先验假设, 这样可以不断利用后验的观测信息, 通过“解方程”的思想, 来逐渐减小对真实参数估值的区间大小; 它的局限性也在于此, 不能用于分析无界噪声的情形, 并且也很难应用于未知参数以非线性方式作用的系统。

**其它有趣的问题** 基于本章中的方法, 我们有可能进一步考虑一些更一般的系统, 比如:

$$y_{t+1} = \sum_{i,j} \theta_{ij} b_{ij} y_{t-j+1} + u_t + w_{t+1}, \quad (4.97)$$

这里指标组 $b_{ij}$ 很细致的刻画了系统多层次的非线性, 那么对这样的系统, 能否给出统一的定理融合本章的结果与[113]中的结果? 这样的问题看起来很有趣, 但目前还不清楚会有什么样的答案, 可以预见的是, 对这一问题的研究必然也有相当的困难。

#### 4.4 本章小结

本章的不可能性定理说明: 对本章研究的具有参数不确定性和高斯白噪声的高阶离散时间非线性系统, 当刻画系统非线性程度的指标组 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 满足一个简单的代数条件时, 任何控制律都不能使系统全局镇定。这反映了对该类系统来说反馈机制的一个能力极限, 本章的结果是近几年来对类似的一阶系统已有研究的继续。该结果表明在一定条件下, 系统的一阶主项所对应的一个多项式决定了该系统反馈机制能力的一个极限。

至于本章中给出的条件是否是必要的, 还需要进一步研究。这一问题如能得到彻底解决, 无疑对进一步深刻认识反馈机制的能力极限具有重要意义。

## 第五章 半参数情形——一个一阶非线性模型

本章中将研究一个简单的一阶离散时间非线性模型，在该模型中内部不确定性同时体现为非参数结构不确定性和参数不确定性，非参数部分的不确定性大小由一个Lipschitz常数 $L$ 来刻画，而参数部分由指标 $b$ 来刻画非线性增长速率。对此模型，我们将构造一个可同时应用于线性增长情形( $b = 1$ )与非线性增长情形( $b > 1$ )的自适应控制器，并在一定条件下证明闭环系统的稳定性。对于 $b = 1$ 的情形，如果参数部分为双线性的，则该条件退化为 $L < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 。

### 5.1 已有结果

前两章中已经介绍了反馈机制能力极限方向上的一些结果，这里不再重复。从前两章的讨论可以看出，在结构未知情形和参数未知情形，我们在证明中用的思路和方法有很大不同。那么一个很大的问题是：有没有可能把这些不同的情形统一起来研究？特别地能否把两个“魔数” $L = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 和 $b = 4$ 统一在一个模型中呢？这是一个很有趣的问题，激发了本章的研究。本章仅对此问题做一些初步的探索。

### 5.2 问题描述

考虑系统：

$$y_{t+1} = f(y_t) + \theta\phi_t + u_t + w_{t+1} \quad (5.1)$$

其中 $u_t$ 为控制信号； $w_{t+1}$ 为未知噪声； $f(\cdot)$ 为未知函数且 $f \in \mathcal{F}(L)$ ； $\theta$ 为未知参数。

在此系统中，有以下的不确定性：

- (1)内部不确定性，包括：非参数部分 $f(y_t)$ 和参数部分 $\theta\phi_t$ 。
- (2)外部不确定性，即噪声部分 $w_{t+1}$ 。

我们要问：当系统同时具有非参数结构不确定性及参数不确定性时，整个反馈机制所能对付的不确定性如何定量刻画？

在本章中，我们作如下的一些假设：

(A1) 函数 $f$ 是下列集合中一个完全未知的函数:

$$\mathcal{F}(L) = \{f : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| + c\}. \quad (5.2)$$

其中正常数 $L$ 可视为系统(5.1)中非参数部分 $f(\cdot)$ 不确定性的一个度量。

(A2) 噪声 $w_t$ 为有界噪声, 即 $|w_t| \leq w$ 。其中 $w$ 为一常数。

(A3) 跟踪信号 $y_t^*$ 有界, 即

$$|y_t^*| \leq S, \forall t \geq 0. \quad (5.3)$$

(A4) 参数部分 $\theta\phi_t$ 中,  $\theta$ 为未知参数; 而 $\phi_t$ 为可量测的量, 比如 $\phi_t = g(y_t)$ , 其中 $g$ 为一已知函数。本章中关于函数 $g$  (或等价地关于 $\phi_t$ ) 我们假设: 存在正常数 $M, M'$ , 使得对任意 $x_1 \neq x_2$ 有

$$M' \leq \left| \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1^b - x_2^b} \right| \leq M, \quad (5.4)$$

其中常数 $b \geq 1$ 。

#### 注5.2.1.

假设 $A_4$ 意味着当 $b = 1$ 时, 函数 $g(\cdot)$ 是线性增长的, 并且是无界的。特别地当 $g(x) = x$ 时,  $M = M' = 1$ 。另外, 式(5.4)可进一步减弱为对充分大的 $x_1, x_2$ 成立即可, 但为了简单起见, 后面的证明中假设式(5.4)对所有实数 $x_1, x_2$ 成立。

#### 注5.2.2.

假设 $A_4$ 排除了 $g(\cdot)$ 为有界函数的情形, 因为这种情形很容易处理: 事实上, 这时 $\theta\phi_t$ 必为有界量, 从而令 $w'_{t+1} = \theta\phi_t + w_{t+1}$ , 则由[116]知: 当且仅当 $L < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 时, 系统可镇定。

### 5.3 一个统一的自适应控制器

为证明本章中的结果, 在本节中我们将构造一个统一的自适应控制器, 它同时可用于线性增长的情形( $b = 1$ ) 和非线性增长的情形( $b > 1$ )。

为方便起见, 首先引入以下记号: 设 $I = [a, b]$ 为一区间, 记 $m(I) \triangleq \frac{1}{2}(a+b)$ 表示 $I$ 的中心点; 而 $r(I) \triangleq \frac{1}{2}|b - a|$ 表示 $I$ 的半径。另设 $x \in \mathcal{R}$ ,  $\delta \geq 0$ , 记 $I(x, \delta) = [x - \delta, x + \delta]$ 表示中心为 $x$ , 半径为 $\delta$ 的闭区间。

对参数 $\theta$ 的估计: 在时刻 $t$ , 可利用的信息有 $y_0, y_1, \dots, y_t; u_0, u_1, \dots, u_{t-1}$ 以及 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_t$ . 引入如下记号:

$$\begin{aligned} z_j &\triangleq y_{j+1} - u_j \\ I_t &\triangleq \bigcap_{i \neq j < t} I\left(\frac{z_j - z_i}{\phi_j - \phi_i}, \frac{L|y_j - y_i|}{|\phi_j - \phi_i|} + \frac{2w+c}{|\phi_j - \phi_i|}\right) \\ \hat{\theta}_t &= m(I_t), \quad \delta_t = r(I_t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

其中 $\hat{\theta}_t = m(I_t)$ 即可作为在时刻 $t$ 对未知参数 $\theta$ 的估计。

对 $g_t \triangleq \theta\phi_t + f(y_t)$ 的估计: 令

$$i_t = \arg \min_{i < t} |y_t - y_i| \quad (5.6)$$

则有

$$\begin{aligned} g_t &= g_t - z_{i_t} + z_{i_t} \\ &= [\theta\phi_t + f(y_t)] - [\theta\phi_{i_t} + f(y_{i_t}) + w_{i_t+1}] + z_{i_t} \\ &= [\theta(\phi_t - \phi_{i_t}) + z_{i_t}] + [f(y_t) - f(y_{i_t}) - w_{i_t+1}] \end{aligned} \quad (5.7)$$

据此, 取

$$\hat{g}_t \triangleq \hat{\theta}_t(\phi_t - \phi_{i_t}) + z_{i_t} = \hat{\theta}_t(\phi_t - \phi_{i_t}) + (y_{i_t+1} - u_{i_t}) \quad (5.8)$$

控制信号 $u_t$ 的构造: 令

$$\begin{aligned} \bar{b}_t &\triangleq \max_{i \leq t} y_i = \max(\bar{b}_{t-1}, y_t) \\ \underline{b}_t &= \min_{i \leq t} y_i = \min(\underline{b}_{t-1}, y_t). \end{aligned} \quad (5.9)$$

在前面的假设下, 可构造控制信号如下:

$$u_t = \begin{cases} -\hat{g}_t + y_{t+1}^* & \text{若 } |y_t - y_{i_t}| \leq D \\ -\hat{g}_t + \frac{1}{2}(\bar{b}_t + \underline{b}_t) & \text{若 } |y_t - y_{i_t}| > D \end{cases} \quad (5.10)$$

其中常数 $D$ 取得足够大, 将在证明中给出。

#### 5.4 参数部分线性增长情形( $b = 1$ )

这一节中我们将研究参数部分线性增长( $b = 1$ )的情形。而对于参数部分非线性增长( $b > 1$ )的情形, 目前还没有得到完整的结果, 所以本章将不再讨论。

### 5.4.1 主要结果

上一节构造出的控制器有如下性质:

**定理 5.1.** 当  $b = 1$ ,  $L \cdot \frac{M}{M'} < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$  时, 由式(5.5)—(5.10) 定义的反馈控制律, 使得闭环系统(5.1)的输出  $\{y_t\}$  有界, 且有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y_t - y_t^*| \leq 2w + c. \quad (5.11)$$

**推论 5.2.** 对同时具有非参数不确定性和参数不确定性的系统(5.1),  $b = 1$  时,

- (i) 若  $L \cdot \frac{M}{M'} < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ , 则存在一个反馈控制律, 使系统能够被镇定。
- (ii) 若  $\phi_t = y_t$  (即  $g(x) = x$ ), 则参数部分  $\theta \phi_t$  不确定性的存在并不影响非参数不确定性所决定的反馈机制的临界值  $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 。

推论5.2的证明: (i)是定理5.1的直接推论。(ii)当  $g(x) = x$  时,  $M = M' = 1$ 。这时正面结果由定理5.1立即可得; 反面结果可由[116]中不可能性结果得到: 若  $L \geq \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ , 对任意控制律  $\{u_t\}$ , 只要取参数  $\theta = 0$ , 就存在函数  $f$ , 使得对应的系统不能被所给的控制律镇定。□

#### 注5.4.1.

系统(5.1)与如下系统(未知函数  $f \in \mathcal{F}(L)$ )

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1}, \quad (5.12)$$

相比, 除了有系统(5.12)的所有不确定性, 其内部结构还多了参数不确定性。因此从直观上看, 反馈机制对付系统(5.1)的困难可能会大于系统(5.12), 这从定理5.1中可得到部分验证(注意  $M' \leq M$ )。不过定理在某种意义上还说明: 当  $M = M'$  时, 即使多了参数不确定性, 但由于参数部分的结构非常明确 ( $\phi_t = y_t!$ ), 结构未知部分  $f(y_t)$  的不确定性就成了主要矛盾, 反馈机制仍能对付  $L < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$  时函数集  $\mathcal{F}(L)$  代表的结构不确定性(当然构造镇定反馈律的困难一般要大些)。

#### 注5.4.2.

定理5.1与参数未知线性系统自适应控制的已有结果也是一致的。当  $L = 0$  时, 结



构未知部分 $f(y_t)$ 可认为本质上不存在, 于是系统(5.1)就成为只含有未知参数的系统

$$y_{t+1} = \theta\phi_t + u_t + w_{t+1}, \quad (5.13)$$

其中 $\phi_t = g(y_t)$ 可具有线性增长速率(注意 $L = 0$ 时定理对 $M, M'$ 的取值没有什么限制)。而根据传统自适应控制的研究结果[21], 不管未知参数 $\theta$ 能在什么范围中取值, 系统(5.13)总能通过最小二乘等辨识与控制算法镇定, 本章则通过另一种途径再次验证了这一结果。

## 5.4.2 定理证明

### 5.4.2.1 几个引理

为证明定理5.1, 我们需要下面的引理:

**引理 5.3.** 设 $\{x_n\}$ 为有界序列, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{i < n} |x_n - x_i| = 0. \quad (5.14)$$

证明: 这一引理是[116]中引理3.4的直接推论, 由反证法易得。□

**引理 5.4.** 设常数 $L \in (0, \frac{3}{2} + \sqrt{2})$ ,  $d \geq 0$ ,  $n_0 \geq 0$ 。若非负序列 $\{h_n, n \geq 0\}$ 满足

$$h_{n+1} \leq \left( L \max_{i \leq n} h_i - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n h_i + d \right)^+, \quad \forall n \geq n_0 \quad (5.15)$$

其中 $x^+ \triangleq \max(x, 0)$ ,  $\forall x \in \mathcal{R}$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n h_i < \infty. \quad (5.16)$$

证明: 参看[116]中引理3.3。□

### 5.4.2.2 定理5.1的证明

**第1步:** 记

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_t &\triangleq \theta - \theta_t \\ y_{t+1}^\# &\triangleq \theta\phi_t + f(y_t) + w_{t+1} - \hat{g}_t \end{aligned} \quad (5.17)$$

则由 $u_t$ 的定义(5.10), 显然有

$$y_{t+1} = \begin{cases} y_{t+1}^{\#} + y_{t+1}^* & \text{若 } |y_t - y_{it}| \leq D \\ y_{t+1}^{\#} + \frac{1}{2}(\bar{b}_t + \underline{b}_t) & \text{若 } |y_t - y_{it}| > D \end{cases} \quad (5.18)$$

下面讨论 $y_{t+1}^{\#}$ :

$$\begin{aligned} y_{t+1}^{\#} &= \theta\phi_t + f(y_t) + w_{t+1} - \hat{g}_t \\ &= \theta\phi_t + f(y_t) + w_{t+1} - \hat{\theta}_t(\phi_t - \phi_{it}) - (\theta\phi_{it} + f(y_{it}) + w_{it+1}) \\ &= (\theta - \hat{\theta}_t)(\phi_t - \phi_{it}) + [f(y_t) - f(y_{it})] + (w_{t+1} - w_{it+1}) \\ &= \tilde{\theta}_t(\phi_t - \phi_{it}) + [f(y_t) - f(y_{it})] + (w_{t+1} - w_{it+1}) \\ &= (\tilde{\theta}_t + D_{t, it})(\phi_t - \phi_{it}) + (w_{t+1} - w_{it+1}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

其中

$$D_{i,j} \triangleq \frac{f(y_i) - f(y_j)}{\phi_i - \phi_j},$$

显然 $D_{ij} = D_{ji}$ 。

对任意的 $i \neq j < t$ , 注意到

$$z_j - z_i = (y_{j+1} - u_j) - (y_{i+1} - u_i) = \theta(\phi_j - \phi_i) + [f(y_j) - f(y_i)] + [w_{j+1} - w_{i+1}], \quad (5.20)$$

从而

$$\theta - \frac{z_j - z_i}{\phi_j - \phi_i} = -D_{i,j} - \frac{w_{j+1} - w_{i+1}}{\phi_j - \phi_i}. \quad (5.21)$$

故

$$\tilde{\theta}_t + D_{t, it} = \left(\theta - \frac{z_j - z_i}{\phi_j - \phi_i}\right) - \left(\hat{\theta}_t - \frac{z_j - z_i}{\phi_j - \phi_i}\right) + D_{t, it} = D_{t, it} - D_{i,j} - \frac{w_{j+1} - w_{i+1}}{\phi_j - \phi_i} + \Delta_{i,j}(t) \quad (5.22)$$

其中

$$\Delta_{i,j}(t) = \frac{z_j - z_i}{\phi_j - \phi_i} - \hat{\theta}_t. \quad (5.23)$$

**第2步:** 因为 $L \cdot \frac{M}{M'} < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ , 所以存在 $\epsilon > 0$  使 $L \cdot \frac{M}{M'} + \epsilon < \frac{3}{2} + \sqrt{2}$ 。

下面引入一些[116]中的记号。记

$$B_t \triangleq [b_t, \bar{b}_t], \Delta B_t = B_t - B_{t-1} \quad (5.24)$$

和

$$|B_t| = \bar{b}_t - b_t, |\Delta B_t| = |B_t| - |B_{t-1}| \quad (5.25)$$

显然若  $y_{t+1} \in B_t$ , 则  $|B_{t+1}| = |B_t|$ ; 否则有

$$|B_{t+1}| = \frac{1}{2}|B_t| + |y_{t+1} - \frac{1}{2}(b_t + \bar{b}_t)|. \quad (5.26)$$

根据  $i_t$  的定义, 易知

$$|y_t - y_{i_t}| \begin{cases} = |\Delta B_t| & \text{若 } y_t \notin B_{t-1} \\ \leq |\Delta B_i| & \text{否则: } y_t \in \Delta B_i \subset B_{t-1} \end{cases} \quad (5.27)$$

**第3步:** 根据假设A4, 固定  $\epsilon$ , 我们取常数  $D, D'$  使得  $|y_i - y_j| > D$  时  $|\phi_i - \phi_j| > D' > \frac{4M(2w+c)}{\epsilon}$ .

我们证明对任意  $s > 0$ , 总存在  $t > s$ , 使得  $|y_t - y_{i_t}| \leq D$ . 事实上, 如若不然, 则存在  $s > 0$ , 对任意的  $t > s$ , 总有  $|y_t - y_{i_t}| > D$ , 相应的  $|\phi_t - \phi_{i_t}| > D'$ .

于是, 根据  $D$  的定义, 对充分大的  $t$  和  $j < t$ ,

$$\left| \frac{w_{j+1} - w_{i_{j+1}}}{\phi_j - \phi_{i_j}} \right| \leq \left| \frac{2w}{D'} \right| < \frac{1}{4M}\epsilon; \quad (5.28)$$

同时根据  $\hat{\theta}_t$  的定义, 可知对任意  $i, j < t$ ,

$$|\Delta_{i,j}(t)| = \left| \frac{z_j - z_i}{\phi_j - \phi_i} - \hat{\theta}_t \right| \leq \frac{L}{M'} + \frac{2w+c}{|\phi_j - \phi_i|}, \quad (5.29)$$

特别地对  $s < j < t, i = i_j$ , 有

$$|\Delta_{j,i_j}(t)| = |\Delta_{i_j,j}(t)| \leq \frac{L}{M'} + \frac{2w+c}{D'} \leq \frac{L}{M'} + \frac{1}{4M}\epsilon. \quad (5.30)$$

下面考虑  $D_{t,i_t} - D_{j,i_j}$ . 令  $d_n = D_{n,i_n}$ , 根据  $D_{i,j}$  的定义,

$$|D_{i,j}| = \left| \frac{f(y_i) - f(y_j)}{y_i - y_j} \right| \cdot \left| \frac{y_i - y_j}{\phi_i - \phi_j} \right| \leq \frac{L}{M'}, \quad (5.31)$$

知序列  $\{d_n, n > s\}$  有界, 于是根据引理5.3,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \min_{s < j < t} |d_t - d_j| = 0. \quad (5.32)$$

从而存在  $s' > s$ , 对任意  $t > s'$ , 有相应的  $j = j(t)$ , 使得

$$|D_{t,i_t} - D_{j,i_j}| = |d_t - d_j| < \frac{1}{4M}\epsilon. \quad (5.33)$$

综上所述, 对任意  $t > s'$ , 取相应的  $j = j(t)$ ,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\theta}_t + D_{t,i_t}| &= |D_{t,i_t} - D_{i_j,j} - \frac{w_{j+1}-w_{i+1}}{\phi_j-\phi_{i_j}} + \Delta_{i_j,j}(t)| \\
&\leq |D_{t,i_t} - D_{i_j,j}| + \left| \frac{w_{j+1}-w_{i+1}}{\phi_j-\phi_{i_j}} \right| + |\Delta_{i_j,j}(t)| \\
&\leq \frac{1}{4M}\epsilon + \frac{1}{4M}\epsilon + \left( \frac{L}{M'} + \frac{1}{4M}\epsilon \right) \\
&= \frac{L}{M'} + \frac{3}{4M}\epsilon \\
&\triangleq L_\epsilon.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

进而

$$\begin{aligned}
|y_{t+1}^\#| &= |(\tilde{\theta}_t + D_{t,i_t}) \frac{\phi_t - \phi_{i_t}}{y_t - y_{i_t}} (y_t - y_{i_t}) + (w_{t+1} - w_{i_t+1})| \\
&\leq L_\epsilon M |y_t - y_{i_t}| + 2w.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

由于  $|y_t - y_{i_t}| > D$ , 可知

$$y_{t+1} = y_{t+1}^\# + \frac{1}{2}(\bar{b}_t + \underline{b}_t). \tag{5.36}$$

根据(5.34)及第2步结果, 可得

$$|B_t| \leq |B_{t+1}| \leq \max\{|B_t|, \frac{1}{2}|B_t| + |y_{t+1} - \frac{1}{2}(\bar{b}_t + \underline{b}_t)|\} = \max\{|B_t|, \frac{1}{2}|B_t| + |y_{t+1}^\#\|\} \tag{5.37}$$

因此结合(5.35)可得

$$|\Delta B_t| \leq (L_\epsilon M |y_t - y_{i_t}| + 2w - \frac{1}{2}|B_t|)^+, \tag{5.38}$$

这里

$$L_\epsilon M = \left( \frac{L}{M'} + \frac{3}{4M}\epsilon \right) M = L \cdot \frac{M}{M'} + \frac{3}{4}\epsilon < \frac{3}{2} + \sqrt{2}. \tag{5.39}$$

由  $t > s'$  的任意性, 联合引理5.4, 可得

$$\sum_{j>s'} |\Delta B_j| < \infty, \tag{5.40}$$

从而  $\{|B_t|\}$  有界, 再由引理5.3,

$$|y_t - y_{i_t}| \leq \min_{i<t} |y_t - y_i| \rightarrow 0. \tag{5.41}$$

这与前面的假设矛盾!

**第4步:** 根据前一步结果, 对任意  $s > 0$ , 总存在  $t > s$ , 使得  $|y_t - y_{i_t}| \leq D$ 。容易证明  $\{|\tilde{\theta}_t|\}$  有界, 不妨设  $|\tilde{\theta}_t| \leq L'$ 。注意到

$$y_{t+1}^\# = \tilde{\theta}_t(\phi_t - \phi_{i_t}) + [f(y_t) - f(y_{i_t})] + (w_{t+1} - w_{i_t+1}), \tag{5.42}$$

于是有

$$|y_{t+1}| \leq |y_{t+1}^\# + y_{t+1}^*| \leq L'|\phi_t - \phi_{i_t}| + (L|y_t - y_{i_t}| + c) + 2w \leq Y, \quad (5.43)$$

其中常数  $Y = L'MD + LD + c + 2w + S$ 。下面的证明类似[116]。

令

$$t_0 = \inf_{t>0} \{t : |y_t| \leq Y\}, \quad t_n = \inf_{t>t_{n-1}} \{t : |y_t| \leq Y\}, \quad (5.44)$$

显然有  $t_n < \infty$ 。

令  $v_n = y_{t_n}$ ，显然  $\{v_n\}$  有界。于是由引理5.3，当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\min_{i<n} |v_n - v_i| \rightarrow 0. \quad (5.45)$$

因此对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $n_0$ ，使得对任意  $n > n_0$ ，

$$\min_{i<n} |v_n - v_i| < \varepsilon. \quad (5.46)$$

于是

$$|y_{t_n} - y_{i_{t_n}}| = \min_{i<t_n} |y_{t_n} - y_i| \leq \min_{i<n} |y_{t_n} - y_{i_{t_n}}| < \varepsilon. \quad (5.47)$$

取  $\varepsilon$  充分小，故对任意  $n > n_0$ ，

$$|y_{t_{n+1}}| \leq L'M\varepsilon + L\varepsilon + c + 2w + S \leq Y. \quad (5.48)$$

从而由  $t_n$  的定义， $t_{n+1} = t_n + 1!$  因此对任意  $t \geq t_{n_0}$ ，

$$|y_t| \leq Y, \quad (5.49)$$

即  $y_t$  有界。

最后，再利用引理5.3，当  $t$  充分大时， $|y_t - y_{i_t}| \leq \varepsilon$ ，从而

$$|y_{t+1} - y_{t+1}^*| = |y_{t+1}^\#| \leq L'M\varepsilon + L\varepsilon + c + 2w. \quad (5.50)$$

由于  $\varepsilon$  可取任意小，定理得证。  $\square$

## 5.5 本章小节

本章中研究了一个简单的同时具有非参数结构不确定性和参数不确定性的—阶离散时间非线性模型，并构造了一个可同时应用于线性增长情形 ( $b = 1$ ) 与非线性增长情形 ( $b > 1$ ) 的自适应控制器，并对于线性增长情形在一些条件下证明了闭环系统的稳定性。对于非线性增长情形，我们希望完全给出使闭环系统稳定的  $b, L, M, M'$  之间的关系，这一目标目前还未实现，有待今后进一步研究。

## 第三部分

### 有限模型自适应控制问题

## 第六章 有限模型自适应控制问题

本章将提出有限模型自适应控制问题，简单介绍研究这些问题的背景，并给出几种控制器设计方案，引入一些本部分中要用到的一些概念与记号，最后还将介绍与这些问题相关的已有研究，揭示它们间的联系。后面几章中将用几种不同的思想、方法来对这些问题作具体的研究。

### 6.1 背景介绍

在前一部分中，对几类典型的不确定非线性系统，对反馈机制的能力与极限进行了一些探索。在这些结果以及这一方向上已有的各种结果[42, 43, 68, 113, 114, 116, 117, 118, 119, 121]中，可以看到其中所考虑的不确定函数集 $\mathcal{F}$ 都是具有无穷多个元素的函数集。比如，在[42]中考虑的系统是

$$y_{t+1} = \theta y_t^b + u_t + w_{t+1}, \quad b > 0,$$

其中 $\theta$ 是未知参数，常数 $b > 0$ 代表非线性增长程度，可以认为这里考虑的不确定函数集为

$$\mathcal{F}_b \triangleq \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} | f(x) = \theta x^b, \theta \in \mathcal{R}\}.$$

再如，在[116]中考虑的系统是

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1},$$

其中未知函数 $f$ 具有Lipschitz常数 $L$ ，因此这里考虑的不确定函数集为

$$\mathcal{F}(L, c) \triangleq \{f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} | |f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| + c, \forall x, x' \in \mathcal{R}\}.$$

这些研究中涉及的系统看起来非常简单，事实上 $f$ 已知时对应的控制问题甚至是平凡的，然而正是函数 $f$ 未知使得问题远非平凡。在某种意义上可以认为，由于这些研究中考虑的函数集内在结构的复杂性（都包含无穷多元素），从而对应的反馈机制能力极限有着很不平凡的临界现象。那么自然地，从理论上可以提出如下问题：对于看起来更简单的情形—函数集 $\mathcal{F}$ 仅包含有限个元素（或者可挑选出有限个代表元素），反馈机制能力极限如何？是否总能找到反馈控制

律对付 $\mathcal{F}$ 有限的不确定性? 在这种情况下, 如何设计有效的反馈控制器? 所有这些问题我们称为有限模型自适应控制问题。这些问题的答案并非显而易见, 原因如前所述。

从另一方面来看, 类似的问题在实际中是很常见的。例如, 在一些设备中我们不知道其确切的内部结构(或参数), 然而通过一些物理或实验知识可知内部结构(或参数)仅有有限种可能(它们可以被视为一些已知的模型)。

因此不论在实际中还是理论上研究前面提出的问题都是很有意义的。对这些问题的研究不仅使我们更进一步理解反馈机制能力和极限, 而且可以提供一些实际的或潜在的应用。我们后面还将看到, 这一部分研究的问题与混杂系统、特别是切换非线性系统有密切的联系, 并且为后者的研究提供了一些新的方法和思路。由于这些问题的动机来自对反馈机制能力和极限的研究, 但在思想、方法、结果等很多方面都不同于前一部分, 因此我们将有限模型自适应控制问题作为一个独立的专题部分来讨论。

## 6.2 问题描述

我们考虑如下的离散时间不确定系统:

$$y_{t+1} = H(y_t, u_t, w_{t+1}), \quad (6.1)$$

其中未知函数 $H \in \mathcal{H}$ , 这里函数集 $\mathcal{H}$ 包含有限个元素或者“本质上”有限个元素(后文会具体解释两种情形的差别),  $\{w_t\}$ 为噪声序列,  $\{u_t\}$ 为控制(输入)信号序列,  $\{y_t\}$ 为系统输出信号序列(这些信号可以为一维的纯量或高维的向量)。

**情形I:** 函数集 $\mathcal{H}$ 仅有有限个元素, 即

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \triangleq \{H_1, H_2, \dots, H_M\},$$

这里 $H_i, i = 1, 2, \dots, M$ 为已知的若干个函数, 每个函数对应于一个模型。在该情形下, 真实的系统能被某个模型 $H_K$ (这里 $K$ 未知)精确刻画。

**情形II:** 函数集 $\mathcal{H}$ 可能有无限多元素, 但是能找到一个有限元素的函数集(模型集)

$$\mathcal{H}_0 \triangleq \{H_1, H_2, \dots, H_M\},$$



使得 $\mathcal{H}$ 中的每个元素 $H$ 位于函数集 $\mathcal{H}_0$ 中某个元素 $H_K$ （这里 $K$ 未知）的一个“邻域”内。这意味着真实的系统可以用某个模型 $H_K$ 来近似刻画，允许一定的建模误差（即未建模动态）。

我们可以利用历史信息 $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_0; u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_0\}$ 来设计控制律 $\{u_t\}$ ，控制目标是使得在未知函数 $H \in \mathcal{H}$ 的前提下，利用已有的有限个模型来设计控制律使闭环系统在某种意义下稳定。直观地看，我们可以从以下方面来理解这些问题：当只知道真实系统能被 $M$ 个已知模型中的某一个来描述，但不知道到底哪一个可以适当的描述真实系统时，我们想知道：能使真实系统镇定的控制器存在吗？存在的话，怎样来设计控制器？显然函数集 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}_0$ 的结构或特点决定了问题的答案。本部分后面的章节将对这些问题进行探索。为方便起见，在本部分中我们将情形I、II分别对应的问题称为问题I、II。

### 6.3 几种控制器设计方案

解决前述问题很自然的思想是利用好针对已知的每个模型设计的控制器。我们假设对已知的模型 $H_i$ ，存在一个能使其稳定的控制器 $u_t^{(i)} = K_i(y_t)$ （这里为便于讨论，仅使用当前状态的反馈），使对应模型为 $H_i$ 的闭环系统

$$y_{t+1} = H_i(y_t, K_i(y_t), w_{t+1})$$

在某种意义下稳定。显然这一假设是必要的，如若不然，则存在某个模型没有对应的镇定控制器，那么当真实系统恰为该模型时，系统就不可能有稳定性。

在情形I和II中涉及多个非线性模型，且通常一个固定的控制器不能使所有的模型稳定，因此需要有不同于鲁棒控制和传统自适应控制的技术来解决前面提的问题。尽管在文献中已经对一些特殊系统类似的或相关的问题进行了研究（参考后面的讨论），但是对一般的非线性系统，问题I和II还没有完整而直接的答案。

我们将在后面几章中考虑如下的一些设计思想：

**先辨识出 $K$ ，再直接选用控制器 $u_t^{(K)}$**  其思想是根据某些条件排除掉不可行的控制器，有限步后留下可行的控制器。这种方法非常简单，只能用于噪声有界的情形，由于其本质上不具有适应性的特点，其稳定性分析比较简单，需要的条件也很弱，但有其不可避免的局限性。

**利用有限个已知模型对应的的控制器在某种误差指标下进行反复切换** 其思想是在每一步,通过计算某种误差指标(如累积的或加权累积的误差),来确定每一步切换到哪个控制器。这一方法可同时适用于有界噪声或无界噪声,并且直观上和实践上具有一定的适应性。然而,由于噪声和未建模动态的因素,使得一般不能保证切换到可行的控制器上,并且这种方式给出的切换序列不能预测,也难以分析其统计性质,因此已有的切换系统的各种方法和结果难以在此应用,在分析上有较大的困难。本部分将对类似最小二乘(LS)和加权最小二乘(WLS)的两类算法进行分析,其区别在于对历史信息的侧重程度有所不同,这将造成这两类算法的稳定性及分析方法有很大的差别。我们得到的结果实际上也可以用于较一般的切换系统。

**利用有限个已知模型对应的的控制器进行加权组合,通过误差信息来调整组合的权重** 这种方法区别于上一种方法的地方是:它不是在控制器间切换,而是进行控制器的加权组合,权重组合根据各模型的误差信息进行渐近调整,因此控制信号一般不会有大的跳跃,但又具有一定的适应性。

**将真实系统理解为含有伪参数的回归模型,用已有的参数辨识算法估计伪参数** 这一方法的思想是将真实系统理解为一个回归模型,回归系数向量为 $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  (第 $K$ 个分量为1),把它视为系统的未知“参数”,然后可用已有的各种参数辨识算法来递推估计它。这一方法有点类似上一方法,但辨识算法得到的伪参数向量的估计一般不具有归一化的特点。这一方法的优点是可以应用很多已有的参数辨识算法,并可能利用已有的大量研究分析其稳定性,其局限性在于这些算法在此应用时一般计算量较大,为保证其稳定性通常需要线性增长条件,因为对一般的非线性系统还缺乏非常成熟有效的辨识算法。

我们将着重研究以上途径中基于切换控制的方法,下面的两章中将研究类似最小二乘(LS)和加权最小二乘(WLS)的两类算法;而在其后的一章中,将针对其它的几种途径,分别提出一些典型的算法并对它们的稳定性进行研究。

## 6.4 与切换系统的联系

本节中将对基于切换控制的方法作一点讨论,从中可看到本章问题与切换系统的本质联系。

在基于切换控制的方法中,控制律取为 $u_t = u_t^{(i_t)} = K_{i_t}(y_t)$ ,其中 $\{i_t\}$ 为切换序列。将此控制律代入系统方程,可得闭环系统

$$y_{t+1} = H(y_t, K_{i_t}(y_t), w_{t+1}). \quad (6.2)$$

令

$$F_i(x, w) \triangleq H(x, K_i(x), w), \quad (6.3)$$

则闭环系统等价于一个一般形式的切换系统

$$y_{t+1} = F_{i_t}(y_t, w_{t+1}), \quad (6.4)$$

因此我们只需研究上述切换系统的稳定性。在这一问题中,对函数 $F_i$ 不作特殊的要求,即它们可具有非常任意的非线性特点。

在下面的两章中,我们将直接在函数集 $\{F_i, i = 1, 2, \dots, M\}$ 加一定条件来研究闭环系统的稳定性,这些条件同时蕴含了对函数集 $\mathcal{H}, \mathcal{H}_0$ 以及控制器集合 $\{K_i\}$ 的要求。因此,我们的研究不仅仅在一定意义上回答有限模型自适应控制问题,而且也是对一类较一般的切换非线性系统的研究。与已有的关于切换系统的大量研究相比,我们这里考虑的切换系统有如下的一些特点:

1. 每个子系统对应的非线性函数 $F_i$ 没有特定的形式,有较大的任意性。
2. 在我们的方法中,切换信号序列 $\{i_t\}$ 由优化某个与 $F_i(y_j, w_{j+1})$ 有关的误差指标得到,因此该序列依赖于系统的状态和外界噪声,不能提前准确预测。
3. 同样的原因,切换信号序列 $\{i_t\}$ 并不固定或预先知道路径,也不具有马氏跳的特点,也很难得到平均停留时间或频率等统计性质。
4. 我们给出的稳定性条件,粗略地说,只要求各个子系统 $y_{t+1} = F_i(y_t, w_{t+1}) (i = 1, 2, \dots, M)$ 中有一个子系统稳定,其它子系统不要求稳定。

由于上面的一些特点,可以想象闭环系统的稳定性分析一般来说比较困难。而且,由于这些特点,研究切换系统常用的一些方法(参考[71, 125, 131]及其中的大量文献),比如共同Lyapunov函数法(CLF,如[84, 98])、多Lyapunov函数法(MLF,如[18, 87])、平均停留时间方法(ADT,如[34, 47])等难以在此直接应用。

在下面的两章中,我们进一步假设:在时刻 $t$ ,对任意 $j < t$ 和 $k = 1, 2, \dots, M$ ,能够利用信息 $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_0; u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_0\}$ 来计算出 $F_k(y_j, w_{j+1})$ 。比如对如下形式的系统(函数 $g$ 已知但 $f$ 未知)

$$y_{t+1} = f(y_t, w_{t+1}) + g(y_t, u_t),$$

这一假设使得我们可以利用 $F_k(y_j, w_{j+1})$  (它们的值一定意义上代表着误差信息)来设计切换序列 $i_t$ ,从而可用历史信息给出控制律。从后两章中的证明过程可以看出,这一假设有可能进一步减弱,比如 $F_k(y_j, w_{j+1})$ 不能由历史信息计算出来,但它们满足一定条件的上下界函数能通过历史信息计算出来。为简单起见,在后面的研究中将不再讨论这些情形。

同样为方便讨论,我们假设噪声为可加噪声,从而函数 $F_k(x, w)$ 有如下分解: $F_k(x, w) = F_k(x) + w$ ,这里我们仍用记号 $F_k$ ,一般情况下并不会导致混淆,因为两种记号参数个数不同。这一假设不是本质的,但能避免引入过多复杂的技术细节。

一个非常简单但不平凡的系统是

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1}, \quad (6.5)$$

其中未知函数 $f \in \mathcal{F}$ ,并设我们有 $M$ 个模型( $i = 1, 2, \dots, M$ ):

$$y_{t+1} = f_i(y_t) + u_t + w_{t+1}, \quad (6.6)$$

即模型集可用 $\mathcal{F}_0 = \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ 来代表。显然对已知的模型 $f_i$ 可以取控制器 $u_t^{(i)} = K_i(y_t) \triangleq -f_i(y_t)$ ,从而对系统(6.5)显然有 $F_i(y_t, w_{t+1}) = f(y_t) + u_t^{(i)} + w_{t+1} = y_{t+1} - u_t - f_i(y_t)$ 。

## 6.5 已有相关结果

从上一节可知,本部分中的问题与混杂系统控制特别是切换控制有密切的联系,因此有必要对一些相关的结果(如[7, 8, 17, 20, 89, 99])进行一下回顾总结。

首先,从非线性系统非参数辨识与控制(不涉及到多个模型)的角度看,已有的研究很少。比如,在[89]中研究了如下的非线性系统模型 $X_{t+1} = f(X_t) + U_t + \xi_{n+1}$ ,其中未知函数 $f$ 满足一定的条件,该文对此不确定系统提出了

两种自适应控制律并给出了一些较好的结果（类似一致几乎处处收敛性）。从形式上看，该文研究的问题有点类似本部分的问题，但可以注意到该文对函数 $f$ 有全局Lipschitz条件的假设（并且Lipschitz常数有一定限制），这使得函数 $f$ 必然是线性增长的；而我们的问题原型中并不限于此。另外，该文还有很多其它的假设，它所关注的系统性质也与本部分问题有所不同。

对于含有未知参数的线性系统，文献中有了大量的研究。当参数集有限时，一个典型的工作可参考[20]，其中考虑的系统具有高斯白噪声，未知参数取自一个有限集合，文章作者对该系统的二次高斯指标问题（LQG）进行了研究，通过一种所谓“有偏损失函数”的方法解决了该问题，并作为副产品给出了闭环系统稳定性的证明。

对于具有特定参数结构的一些非线性系统，文献中也有一些研究（如[8, 17, 23]）。比如，文献[8]中研究了一类具有凸（凹）参数结构的连续时间系统的自适应控制问题，给出了参数收敛的一些条件，其方法的局限性在于：只研究了确定性的系统，系统的非线性部分需假设为有界的，而且凸（凹）条件是必需的。此后，文献[99]中对一类离散时间非线性参数化系统提出了一个所谓的极小-极大估计器，给出了一些参数收敛的条件，在该方法中非线性部分的有界性、参数域的紧性、噪声的有界性都是必需的。

至于本章中提出的问题，近期的文献中对一些类似的问题有过讨论，特别是所谓的“有监督切换控制”（Supervisory Switching Control）方法吸引了一些学者的注意。比如，文献[7]对一类非线性参数化的离散时间系统，基于否定不可行控制器的思想，提出了一种“有监督切换逻辑”的途径来设计控制器，证明了系统能实现所谓“实际意义下的输入-状态稳定性”（*practical input-to-state stable*）。这一结果从数学上看非常漂亮，需要的条件是噪声必须有界（不必先验地知道噪声的上界），并假设能够设计出一族鲁棒输入-输出稳定的控制器。通过利用输入-状态稳定性的概念，他们的方法可以用于较广泛的一类非线性系统。使用这一途径的前提是找到与输入-状态稳定性关联的各ISS-Lyapunov函数，因为构造控制算法时需要用这些函数之间的性质来达到否定不可行控制器的目的。这一要求可能在某种程度上会限制该方法在实际中的应用，因为构造出ISS-Lyapunov函数通常是比较困难的；另外，从根本上说，由于采用了“否定不可行控制器”的思想，有限步后系统将不再进行任何切换，从而固定在某个控制器上，算法将失去适应性；正是这一特点使得该文中的算法较容易分析，因此，为克服该算法的这些缺点，当系统的参数随时间可能变化时，需要用周期性

重启、时间窗口等技术(参考[7])来修正该文中的算法,然而这些修正算法的理论分析仍然是目前未能解决的问题。

关于切换控制方面的结果,已有的研究非常多,根据切换律的特点,文献中主要研究关于任意切换律的稳定性、马氏跳变切换系统的稳定性、切换律具有一定统计性质(停留时间/平均停留时间)的系统的稳定性等等。已有研究中不管切换律是否可观测,多数都要求切换律与状态及噪声无关(独立),而且多针对切换线性系统进行讨论。由于本部分问题与多数切换系统已有研究的区别,本文不再详细介绍这方面已有的成果,可参考上一节中提到的部分文献。

## 6.6 本部分预备概念

为后几章中叙述方便起见,本章中先引入以下概念:

**定义 6.1.** 如果在噪声序列 $\{w_t\}$ 有界的条件下,输出序列 $\{y_t\}$ 有界,则称系统 $y_t = F(y_{t-1}, w_t)$ 有输入有界输出有界稳定性(BIBO 稳定性)。

**定义 6.2.** 如果在噪声序列 $\{w_t\}$ 满足

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |w_t|^p < \infty \quad (6.7)$$

的条件下,系统的输出序列 $\{y_t\}$ 在 $p$ 次平均意义下有界,即

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t|^p < \infty \quad (6.8)$$

则称系统 $y_t = F(y_{t-1}, w_t)$ 具有 $p$ -平均稳定性。

### 注6.6.1.

式(6.7)是一个非常弱的条件,它对很多类随机噪声几乎处处都成立,比如具有有限绝对 $p$ 阶矩的独立同分布噪声序列 $\{w_t\}$ 。因此 $p$ -平均稳定性常用于随机系统。在文献(如[21])中,对噪声序列 $\{w_t\}$ 的一个标准的较弱假设是: $\{w_t\}$ 为一鞅差列且满足

$$\sup_n E[|w_{n+1}|^\beta | \mathcal{F}_n] < \infty, \quad (6.9)$$

对某个 $\beta \in [2, \infty)$ ;借助鞅收敛定理[21]等工具可以证明一定条件下式(6.9)蕴含了式(6.7)。

**定义 6.3.** 对系统  $y_t = F(y_{t-1}, w_t)$ , 如果输出序列  $\{y_t\}$  满足(噪声  $\{w_t\}$  满足一些统计条件)

$$\sup_t E y_t^2 < \infty \quad (6.10)$$

则称该系统是随机均方稳定的。

### 注6.6.2.

随机均方稳定性和  $p$ -平均稳定性有一定的联系(比如对序列  $\{y_t\}$  加一些遍历性条件), 但互不蕴含, 须视具体情况来选用。在研究随机系统时, 经常分析其随机均方稳定性。但在本部分的大多数研究中, 由于涉及的切换系统或混杂系统中的离散信号序列(表现为切换序列  $\{i_t\}$ ) 都依赖于状态及噪声, 因此数学期望等统计性质在此相对较难分析, 这也是本部分中主要分析 *BIBO* 稳定性和  $p$ -平均稳定性的一个原因。后面的章节中, 将对其中一个算法分析随机均方稳定性, 主要原因是该算法本质上将系统看成回归模型, 对“伪参数向量”用传统的系统辨识算法来辨识, 从而较适用于分析其随机均方稳定性。

在本部分中, 为方便起见, 还将使用如下的记号:  $\bar{\rho}(h) = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |h(x)|$ ,  $\tilde{\rho}(h) = \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|h(x)|}{|x|}$ . 同时我们定义  $\bar{\rho}(g, g') \triangleq \bar{\rho}(g - g')$ ,  $\tilde{\rho}(g, g') \triangleq \tilde{\rho}(g - g')$ . 在这里用相同的记号并不会导致歧义。显然,  $\bar{\rho}(g, g')$  和  $\tilde{\rho}(g, g')$  可用来衡量函数  $g$  与  $g'$  间的“距离”。对于  $x$  为向量的情形, 上面定义中的  $|\cdot|$  可用某种向量范数来代替。本部分中将主要考虑一维的系统, 即  $y_t \in \mathcal{R}$  的情形, 而对于高维或高阶的系统, 从概念和思想上来说, 并没有多少本质差异。所以除了个别情形, 本部分后面几章将不再讨论高维或高阶的系统。

在本部分中, 我们总假设(A0) 函数  $F_i(x)$  与  $K_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) 是局部有界的。这一基本假设并不苛刻因为即使是无界的或不连续函数都可能满足这一假设。比如, 由于任意连续函数在一闭区间内都有界, 从而任意  $\mathcal{R}$  内的连续函数都满足这一假设。这一假设排除了类似  $\frac{1}{x}$  这样的函数。

## 6.7 本章小结

本章中提出了有限模型自适应控制问题, 简单介绍了这些问题的背景, 给出了几种控制器设计方案, 引入了一些概念和记号, 介绍了与这些问题相关的一些研究。在接下来的两章中, 将分别对拟LS型算法和拟WLS型算法进行稳定

性分析和讨论。然后在本部分最后一章，将对本章中提到的其它一些算法作一些稳定性分析和讨论，并对本部分的内容进行简单的总结。



## 第七章 拟LS型算法及分析

在本章中我们对有限模型自适应控制问题，提出并研究了拟LS型算法，该算法借鉴了常用的最小二乘算法的思想，应用了所有的历史信息，并把这些信息以同等重要程度来对待。对这一算法，我们将在线性增长条件下证明其 $p$ -平均稳定性。该算法对噪声要求的条件较低，只需要噪声在 $p$ 次平均的意义下有界即可，因此能同时对付有界噪声与无界噪声。同时由于该算法具有一定的适应性，它能够克服一些基于“否定不可行控制器”思想的监督切换控制（Supervisory Switching Control）的缺点。

### 7.1 拟LS型算法

由于最小二乘(LS)算法是统计、系统辨识和自适应控制中常用的一种估计方法，并且在实际中有着较好的性能，因此在本章中我们首先提出一种借鉴最小二乘思想的拟LS型算法。它与普通最小二乘的共同之处是利用误差信息的累积和来决定最合适的估计，但区别之处也非常明显，详见算法后面的讨论。

#### 算法7.1.1.

取控制律为

$$u_t = u_t^{(i_t)} = K_{i_t}(y_t), \quad (7.1)$$

其中

$$i_t = \begin{cases} \arg \min_k S_t(F_k), & \text{如果 } |y_t| > d \\ i_{t-1}, & \text{否则} \end{cases}$$

对 $1 \leq k \leq M$ ，定义 $S_t(F_k)$ 如下： $(S_0(F_k) = 0)$

$$S_t(F_k) = S_{t-1}(F_k) + |F_k(y_{t-1}, w_t)|^p.$$

此处 $d \geq 0$ 和 $p \geq 1$ 可以任意选取。

#### 注7.1.1.

由 $S_t(F_k)$ 的定义，可知

$$S_t(F_k) = \sum_{j=1}^t |F_k(y_{j-1}, w_j)|^p.$$

当 $d = 0$ 时,  $i_t = \arg \min_k S_t(F_k)$ , 特别地当 $p = 2, d = 0$ 时, 此算法相当于最小二乘算法。此算法引入参数 $d$ 用来调整系统性能和速度: 选择较大的 $d$ 可以减少计算量, 从而提高算法效率; 而选择较小的参数 $d$ , 系统会有较好的控制效果, 但计算量和切换次数可能会较多。参数 $p$ 一定程度上可用来调整系统的稳健性(鲁棒性):  $p$ 越小稳健性越好; 比如 $p = 1$ 时, 在统计上常被视为一种稳健估计。

### 注7.1.2.

算法7.1.1不断地根据历史时刻得到的误差信息自适应地选择“看起来”比较合适的控制器, 因此直观上应该可以对付慢时变的系统, 这在仿真中也得到了证实。但值得一提的是, 由于这一算法同等看待所有历史信息, 因此并不适于在长期快变的系统中使用, 因为对这样的系统, 显然最近时刻的信息最重要, 这时下一章中介绍的拟WLS型算法更合适一些。不过即便如此, 也可以通过对这里介绍的拟LS型算法引入周期性重启、时间窗口等方法进一步提高这一算法的可用性。

## 7.2 主要结果

为研究算法7.1.1, 我们引入如下假设:

**AL.** 对任意的 $1 \leq i \leq M$ ,  $\tilde{\rho}(F_i) < \infty$ 。换言之, 存在某个常数 $A \geq 0$ 和 $A' \geq 0$ , 使得

$$|F_i(x)| \leq A|x| + A', \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

[在此我们对 $A$ 和 $A'$ 的取值没有限制。]

**AK.** 存在某模型 $H_K \in \mathcal{H}_0$  使得 $\tilde{\rho}(F_K) < \epsilon$ , 其中常数 $\epsilon \in (0, 1)$  足够小, 满足 $\alpha_\epsilon \triangleq MC\epsilon^p < 1$ , 这里 $C$  是一个依赖于 $\mathcal{H}_0$  和 $\mathcal{H}$  的常数(其取值可参看后文的证明)。

**AW.** 噪声序列在 $p$ 次平均的意义下有界, 即

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |w_t|^p < \infty. \quad (7.2)$$

**定理 7.1.** 对系统(6.1), 若假设条件AL、AK和AW成立, 则拟LS型算法7.1.1闭环系统有 $p$ -平均稳定性。

**注7.2.1.**

假设AL要求函数 $F_i(x)$ 有线性增长速率. 假设AK保证了至少有一个模型 $H_K$ 可用来较好的近似真实的系统 $H$ , 在某种程度上函数 $F_K(x)$ 可被视为“逼近误差”或“未建模动态”. 对特殊的系统(6.5), 假设AK较容易验证, 尤其是 $f \in \mathcal{F}_0$ 时, 由于存在 $K$ 使得 $f = f_K$ , 相应的 $F_K(x) = 0$ .

**注7.2.2.**

对有界噪声或具有任意阶绝对矩有限的独立同分布随机噪声序列, 我们只要求 $\epsilon \in (0, 1)$ , 就可以取 $p > 1$ 足够大就可使 $\alpha_\epsilon < 1$ .

**注7.2.3.**

对有界噪声, 一般情况下我们希望输出序列 $\{y_t\}$ 有界; 然而对拟LS型算法这一点还做不到. 后面将构造出反例说明: 即使噪声有界和假设AL成立, 输出序列 $\{y_t\}$ 也可能无界. 与拟LS型算法不同, 对后两章中的拟WLS型算法和一些其它算法, 我们将在一些相对较弱(不必局限于线性增长情形)的假设下证明它们有BIBO稳定性.

**注7.2.4.**

我们有必要说明一下在分析算法7.1.1时存在的困难. 在系统辨识和自适应控制领域中, 对传统LS算法的理论分析吸引了很多学者, 并且在过去几十年中也取得了很大的进展(参考[21, 72]). 对随机线性系统, 郭和陈通过充分利用递推LS算法的特殊结构特征, 得到了LS估计器的一些基本性质(参考[21, 39, 41]). 然而, 对算法7.1.1, 由于缺少像Riccati方程这样的公式, 所以LS算法的基本性质不可用, 因此我们需要探索一些新的方法来研究前面提到的拟LS型算法. 在本章的证明中可以看到有限个模型的特点和线性增长率的假设在稳定性分析中起很大作用. 后面还将通过反例说明: 对拟LS型算法来说, 线性增长的假设不能去掉, 这一点类似于传统的LS算法.

### 7.3 主要结果在参数情形的应用

在有限模型自适应控制问题中, 我们并不要求真实系统和各个模型具有类似的结构特点; 然而在实际应用中, 会经常遇到系统含有未知参数, 这恰恰是传统自适应控制主要研究的情形. 那么, 前面给出的结果能否应用于参数情形呢?

为简单起见, 我们以一个特殊的系统为例来说明这一问题: 考虑如下参数

不确定系统

$$y_{t+1} = f(\theta, y_t) + u_t + w_{t+1},$$

其中函数 $f(\theta, x)$ 已知, 但参数 $\theta$ 的值未知。由于参数 $\theta$ 在一个大范围内未知, 很多时候不能设计一个鲁棒控制器来“对付”所有可能的 $\theta$ 值, 但有可能针对若干个参数值 $\theta_i$  (代表若干个已知的模型) 分别设计相应的局部鲁棒控制器。容易看出, 这种情形可作为有限模型自适应控制问题的特例。为便于清楚简明的说明思想, 在本节中我们仅考虑这一类简单的参数不确定系统。

在这一部分中, 我们将应用非参数情形的结果, 来对参数情形做一些讨论。

### 7.3.1 “恰当开覆盖”

我们首先需要研究一个函数空间 $(\mathcal{L}, \tilde{\rho})$ 。记 $\mathcal{L}$ 为具有线性增长率的函数集合, 并且我们可以根据距离 $\tilde{\rho}(\cdot, \cdot)$ 在 $\mathcal{L}$ 中定义拓扑。对任意函数 $g \in \mathcal{L}$ , 我们可以定义一个半径为 $r$ 的开球:

$$\mathcal{B}(g, r) \triangleq \{g' \in \mathcal{L} : \tilde{\rho}(g, g') < r\}.$$

采用这种方法, 我们可以定义一个伪度量空间 $(\mathcal{L}, \tilde{\rho})$ 。

#### 注7.3.1.

注意到 $\mathcal{L}$ 并不是一个度量空间(因为由 $\tilde{\rho}(g, g') = 0$ 得不出 $g \equiv g'$ ), 因此度量空间的很多性质不能用来研究 $\mathcal{L}$ 。可以证明伪度量空间 $\mathcal{L}$ 不是一 $T_0$ 空间, 从而也不是 $T_1$ 空间, 豪斯多夫( $T_2$ )空间或 $T_3$ 空间, 所以拓扑空间的很多结果都不能用。不过, 可以证明 $\mathcal{L}$ 是一准紧空间, 这样由拓扑[58]的知识, 可以证明集合 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{L}$ 中的紧集当且仅当在 $\mathcal{F}$ 上对每个序列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ 存在一聚点, 这可能对验证 $\mathcal{L}$ 的子集的紧致性有用。

现在假设真实系统 $f \in \mathcal{F}$ , 其中 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{L}$ 的一紧子集。则存在有限个开球 $\{\mathcal{B}(f_i, r_i)\}$ 使得 $\mathcal{B}(f_1, r_1), \mathcal{B}(f_2, r_2), \dots, \mathcal{B}(f_M, r_M)$ 能覆盖集合 $\mathcal{F}$ , 即

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^M \mathcal{B}(f_i, r_i).$$

对这样一个开覆盖, 令

$$\epsilon = \max(r_1, r_2, \dots, r_M), \quad (7.3)$$

如果对某个常数  $p \geq 1$ , 定理7.1的条件“ $\alpha_\epsilon < 1$ ”成立, 则称  $\{\mathcal{B}(f_i, r_i), i = 1, 2, \dots, M\}$  为  $\mathcal{F}$  的恰当开覆盖。

由定理7.1可得以下定理:

**定理 7.2.** 对系统(6.5), 假设  $f \in \mathcal{F}$ , 其中  $\mathcal{F}$  为  $\mathcal{L}$  的一个紧子集。如果对某个常数  $p \geq 1$  来说, 存在紧集  $\mathcal{F}$  的一个恰当开覆盖  $\{\mathcal{B}(f_i, r_i)\}$ , 则在算法 7.1.1 下, 系统(6.5)在  $p$ -平均意义下稳定。

那么给出  $\mathcal{L}$  的一个紧子集  $\mathcal{F}$ , 是否总存在  $\mathcal{F}$  的一个恰当开覆盖? 在有界噪声情形下答案是肯定的。事实上, 对任意小的  $0 < \epsilon < 1$ ,

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{g \in \mathcal{F}} \mathcal{B}(g, \epsilon),$$

因此由紧集的定义, 存在开覆盖  $\{\mathcal{B}(g, \epsilon), g \in \mathcal{F}\}$  的一个有限子覆盖  $\{\mathcal{B}(g_i, \epsilon), i = 1, 2, \dots, M\}$  使得

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^M \mathcal{B}(g_i, \epsilon), \quad (7.4)$$

其中  $M$  为一依赖于  $\epsilon$  的常数。固定  $\epsilon$  和  $M$ , 可取  $p > 1$  足够大满足  $\alpha_\epsilon < 1$ 。即以下定理成立:

**定理 7.3.** 对系统(6.5), 假设  $f \in \mathcal{F}$ , 其中  $\mathcal{F}$  为  $\mathcal{L}$  的紧子集。则在有界噪声情形, 取  $p > 1$  足够大, 令模型集  $\mathcal{F}_0 = \{g_1, g_2, \dots, g_M\}$ , 其中  $g_i$  在(7.4)中定义, 则在算法 7.1.1 下, 系统的输出序列  $\{y_t\}$  在  $p$ -平均意义下有界, 即

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t|^p < \infty.$$

### 7.3.2 参数非线性情形的应用

基于上面的结果, 我们可以把它应用到一类参数未知的非线性系统。

**定理 7.4.** 考虑以下参数不确定非线性系统

$$y_{t+1} = f(\theta, y_t) + u_t + w_{t+1},$$

其中函数  $f(\theta, x)$  已知, 未知参数  $\theta$  位于一个已知的紧集  $D \subseteq \mathcal{R}$ , 且函数  $f(\theta, x)$  对每个  $\theta \in D$  关于  $x$  具有线性增长速率:

$$|f(\theta, x)| \leq A_\theta |x| + A'_\theta.$$

如果函数  $f(\theta, x)$  满足如下条件之一:

1.  $f(\theta, x)$  关于  $\theta$  是等度连续的;
2.  $f(\theta, x)$  是光滑的, 且  $\frac{\partial f(\theta, x)}{\partial \theta}$  对任意的  $\theta \in D$  关于  $x$  具有线性增长速率;
3. 对任意的  $\theta, \theta' \in D$ ,  $|f(\theta, x) - f(\theta', x)| \leq \gamma(|\theta - \theta'|) \cdot |x| + o(|x|)$ ; 其中  $o(|x|)$  不依赖于  $\theta, \theta'$ , 且  $\gamma(\cdot)$  为一  $\mathcal{K}$ -类函数, 即  $\gamma(0) = 0$  且  $\gamma: \mathcal{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{R}_{\geq 0}$  严格单增并连续。

则在有界噪声情形下, 当取  $p > 1$  足够大时, 可以找到紧集  $\mathcal{F}$  的一个恰当开覆盖  $\{\mathcal{B}(f_i, r_i), i = 1, 2, \dots, M\}$ 。从而在算法 7.1.1 下, 系统的输出序列  $\{y_t\}$  在  $p$ -平均意义下有界:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t|^p < \infty. \quad (7.5)$$

现在我们用此定理来给出一些例子。

### 例子 7.3.1.

考虑函数  $f(\theta, x) = \theta \sin(\theta x)$ , 其中未知参数  $\theta \in D = [a, b]$ , 且  $a < b$  可为任意实数。显然一般来说  $f(\theta, x)$  既不是凸函数也不是凹函数。对任意的  $\theta \in D$ , 易知

$$\left| \frac{\partial f(\theta, x)}{\partial \theta} \right| = |\sin(\theta x) + \theta x \cos(\theta x)| \leq |\theta| \cdot |x| + 1$$

由定理 7.4, 具有未知参数  $\theta \in D$  的离散时间非线性系统

$$y_{t+1} = \theta \sin(\theta y_t) + u_t + w_{t+1}$$

在算法 7.1.1 下具有  $p$ -平均稳定性 (取适当大的  $p > 1$ ), 即

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t|^p < \infty. \quad (7.6)$$

### 例子 7.3.2.

考虑函数

$$f(\theta, x) = \alpha_1(\theta) \alpha_2(x) + e(\theta, x), \quad (7.7)$$

其中  $\alpha_1(\cdot)$  为一光滑函数,  $\alpha_2(x) = O(|x|)$  且  $e(\theta, x) = o(|x|)$ 。容易证明, 对任意  $\theta, \theta' \in D$ ,

$$|f(\theta, x) - f(\theta', x)| \leq C_D |\theta - \theta'| \cdot |x| + o(|x|)$$

其中  $C_D$  为一依赖于紧集  $D$  的常数, 因此定理 7.4 可用。一个特殊情形是含参的线性系统:  $\alpha_1(\theta) = \theta, \alpha_2(x) = x$  且  $e(\theta, x)$  有界, 这是一个可用传统递推最小二乘算法的例子, 本例表明采用算法 7.1.1 (选取合适的  $p > 1$ ) 也可使系统稳定。

### 7.3.3 与已有结果的比较

前一章中已经列举了一些以前相关的结果, 故此处不再重复。与这些结果相比, 在本章中提出的方法可以直接应用(无需构造ISS-Lyapunov 函数) 来对付有界或无界噪声。定理7.4的条件简单且易验证, 但定理7.4的一个缺点是所能涵盖的非线性参数系统不如[7]中的广泛。这部分的结果给出了一种沟通非参数和参数情形的方法。

## 7.4 两个反例

在这一部分中我们对提到的拟LS型算法, 构造两个反例:

1. 反例1用来表明假设AL不能保证在噪声序列有界时输出序列的有界性, 因此定理7.1的结果一般来说不能进一步加强。
2. 反例2用来表明当去掉假设AL时输出序列 $\{y_t\}$ 在平均意义下也可以无界, 因此定理7.1的条件AL不能够去掉。

在具体举这些反例之前, 有必要指出在: 对算法7.1.1的大量仿真中没遇到这样的例子。在仿真中找不到这种反例的原因是: 通过理论分析发现反例必须有很多奇怪性质, 这在实际的控制系统中很少见。在我们的仿真试验中, 采用很多种非线性函数(包括通常使用的函数和他们的组合, 无限振荡函数或跳变函数, 甚至是随机产生的函数)也没找到反例。因此下面提出的反例可能仅具有理论价值, 在实际中不用担心会碰到这样的例子。

由于此处构造的函数形状很复杂, 所以我们不直接给出它们的数学表达式。我们只通过阐述构造的过程来说明这样的反例确实存在。我们针对最简单的系统(6.5)来构造反例。

### 7.4.1 反例1

为简单起见, 我们取 $p = 1, d = 0$ 。由算法7.1.1,

$$i_t = \arg \min_k s_k(t)$$

其中

$$\begin{aligned} s_k(t) &\triangleq S_t(F_k) = S_{t-1}(F_k) + |F_k(y_{t-1}, w_t)| \\ &= \sum_{j=1}^t |y_j - u_{j-1} - f_k(y_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^t |f(y_{j-1}) - f_k(y_{j-1}) + w_j| \\ &= \sum_{j=1}^t |g_k(j-1)|. \end{aligned}$$

为方便起见, 引入如下记号:

$$g_k(j-1) \triangleq f(y_{j-1}) - f_k(y_{j-1}) + w_j, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

因此

$$y_j = f(y_{j-1}) + u_{j-1} + w_j = F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j) = g_{i_{j-1}}(j-1). \quad (7.8)$$

现在我们简单陈述构造过程:

1. 显然对任意固定的  $1 \leq k \leq M$ , 给出单调递增序列  $\{s_k(t)\}_{t=1}^{\infty}$  后, 就可以确定序列  $\{|g_k(t)|\}_{t=1}^{\infty}$ .
2. 当  $k = 1, 2, \dots, M$  时, 给出序列  $\{s_k(t)\}_{t=1}^{\infty}$  与  $\{|g_k(t)|\}_{t=1}^{\infty}$  后, 并由  $i_t$  的定义:  $i_t = \arg \min_k s_k(t)$ , 则联合 (7.8) 我们可以确定序列  $\{i_t\}_{t=1}^{\infty}$  与  $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ .
3. 既然我们已经知道序列  $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$  与  $\{g_k(t)\}_{t=1}^{\infty}$ , 所以当给出函数  $f(x)$  和噪声序列  $\{w_t\}$ , 就可以确定当  $t = 1, 2, 3, \dots$  时,  $f_k(y_t)$  的值了。函数  $f_k(x)$  在区域  $\mathcal{R}$  内的其它点的值可通过插值构造。
4. 由上面三步, 对每个  $k$ , 我们已定义了函数  $f_k(\cdot)$ 。现在我们需要验证是否每个函数  $f_k(\cdot)$  都满足假设  $A0$ 。这需要验证两个条件:

(a) 序列  $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$  中的点必须不一样, 从而保证  $f_k(x)$  确实是一函数, 即从  $\mathcal{R}$  到  $\mathcal{R}$  的映射;

(b) 对序列  $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$  的任意有界子序列  $\{y_{t_j}\}_{j=1}^{\infty}$ , 相应的序列  $\{f_k(y_{t_j})\}$  有界。

一个反例必须满足以下的条件: 存在发散序列  $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$  的一个子列  $\{y_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$  使得

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n - t_{n-1}) = \infty$ ;



- $\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{t_n - m}| = \infty$  对任意固定整数  $m \geq 0$ ;
- 存在序列  $\{t'_n\}$  ( $t_n < t'_n < t_{n+1}$ ) 使得对任意整数  $m \geq 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |y_{t'_n - m}| < \infty$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t_{n+1} - t'_n) = \infty;$$

- 存在序列  $\{j_n\}$  使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{j_n}| = \infty,$$

且

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |y_{j_{n+1}}| < \infty.$$

还能由假设A0推出其它一些奇怪条件(略去), 这些条件给构造反例带来了一定的困难。

现在我们对问题I设法构造一个反例。取  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 = \{f_1, f_2, f_3\}$ , 即我们有三个可用模型。假设第一个模型是真实系统, 即  $f_1(x) \equiv f(x)$ 。为简单起见, 取  $f(x) \equiv 0$  且  $w_t \equiv w = 1$ 。根据前面陈述的构造过程, 我们只需对  $k = 1, 2, 3$  给出序列  $\{s_k(t)\}_{t=1}^{\infty}$ 。显然对模型1我们有  $g_1(t) = w_{t+1} = w$ , 从而  $s_1(t) = wt$ 。

下面我们给出序列  $s_2(t)$  和  $s_3(t)$  的构造。令  $j_0 = 1$ , 定义序列  $\Delta_n$  和  $j_n$  如下:

$$\Delta_n = 2^{n-1}, j_n = 1 + \sum_{l=1}^n \Delta_l = 2^n.$$

并定义以下函数

$$h_n(x) = \frac{x}{\Delta_n + 1 - x},$$

$$d_n(x) = h_n(x+1) - h_n(x) = \frac{x+1}{\Delta_n - x} - \frac{x}{\Delta_n - x + 1} = \frac{\Delta_n + 1}{(\Delta_n - x - 1)(\Delta_n - x)}.$$

且对每个正整数  $t$ , 存在一个相应的整数  $m$  使得

$$j_{m-1} \leq t < j_m.$$

并假设常数  $e \in (0, \frac{1}{2})$ , 如果  $m$  是奇数, 则定义

$$\begin{aligned} s_2(t) &= h_m(t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2}, \\ s_3(t) &= \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m} (t - j_{m-1}) + j_{m-1} + e; \end{aligned}$$

否则, 定义

$$\begin{aligned} s_2(t) &= \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}(t - j_{m-1}) + j_{m-1} + e, \\ s_3(t) &= h_m(t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

我们将证明:

(1) 对  $k = 2, 3$ , 序列  $\{s_k(t)\}$  严格递增。事实上, 当  $j_{m-1} \leq t < t + 1 < j_m$  时, 由于函数  $h_m(\cdot)$  严格递增且  $\Delta_m \geq 1 > e > 0$ , 显然我们有  $s_2(t) < s_2(t + 1)$ ,  $s_3(t) < s_3(t + 1)$ 。因此我们只需考虑  $t = j_m - 1$  的情形: 如果  $m$  为一奇数, 则

$$\begin{aligned} s_2(j_m - 1) &= h_m(j_m - 1 + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2} \\ &< h_m(j_m - j_{m-1}) + j_{m-1} = h_m(\Delta_m) + j_{m-1} \\ &= \Delta_m + j_{m-1} = j_m \\ &< j_m + e = s_2(j_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3(j_m - 1) &= \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}(j_m - 1 - j_{m-1}) + j_{m-1} + e \\ &= j_m + \frac{e}{2^{m-1}} - 1 \\ &< \frac{1}{2^{m+1+1}} + j_m - \frac{1}{2} \\ &= h_{m+1}(j_m + \frac{1}{2} - j_m) + j_m - \frac{1}{2} = s_3(j_m); \end{aligned}$$

否则, 类似地我们可以证明:  $m$  为偶数时  $s_2(j_m - 1) < s_2(j_m)$ ,  $s_3(j_m - 1) < s_3(j_m)$ 。

(2) 当  $j_{m-1} \leq t < j_m$  时, 如果  $m$  为奇数, 则  $i_t = 2$ ; 否则  $i_t = 3$ 。事实上, 如果  $m$  为奇数, 我们有

$$\begin{aligned} s_2(t) &= h_m(t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{(t + \frac{1}{2} - j_{m-1})}{\Delta_m + 1 - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1})} + j_{m-1} - \frac{1}{2} \\ &< (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2} = t = s_1(t) \\ &< \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}(t - j_{m-1}) + j_{m-1} + e = s_3(t); \end{aligned}$$

否则, 类似地可以证明  $s_3(t) < s_2(t)$ 。

(3) 这样我们可以对  $k = 2, 3$  给出序列  $\{g_k(t)\}$ 。取  $g_k(t) = s_k(t + 1) - s_k(t)$ 。由  $s_2(t)$  和  $s_3(t)$  的定义我们可得以下结果:

当  $j_{m-1} \leq t \leq j_m - 2$  时, 如果  $m$  为奇数, 则

$$\begin{aligned} g_2(t) &= s_2(t + 1) - s_2(t) \\ &= h_m(t + 1 + \frac{1}{2} - j_{m-1}) - h_m(t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) \\ &= \frac{\Delta_m + 1}{(\Delta_m - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) - 1)(\Delta_m - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}))}, \\ g_3(t) &= s_3(t + 1) - s_3(t) = \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}; \end{aligned}$$

如果 $m$ 为偶数, 则

$$\begin{aligned} g_2(t) &= s_2(t+1) - s_2(t) = \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}, \\ g_3(t) &= s_3(t+1) - s_3(t) = \frac{\Delta_m + 1}{(\Delta_m - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) - 1)(\Delta_m - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}))}. \end{aligned}$$

当 $t = j_m - 1$ , 如果 $m$ 为奇数, 则

$$\begin{aligned} g_2(j_m - 1) &= s_2(j_m) - s_2(j_m - 1) \\ &= (j_m + e) - [h_m(j_m - 1 + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2}] \\ &= \Delta_m + e + \frac{1}{2} - \frac{(j_m - 1 + \frac{1}{2} - j_{m-1})}{\Delta_m + 1 - (j_m - 1 + \frac{1}{2} - j_{m-1})} \\ &= \Delta_m + e + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(\Delta_m - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6}, \\ g_3(j_m - 1) &= s_3(j_m) - s_3(j_m - 1) = \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}; \end{aligned}$$

如果 $m$ 为偶数, 则

$$\begin{aligned} g_2(j_m - 1) &= s_2(j_m) - s_2(j_m - 1) = \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m}, \\ g_3(j_m - 1) &= s_3(j_m) - s_3(j_m - 1) = \frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

(4) 于是我们可以由公式 $y_{t+1} = g_{i_t}(t)$ 给出序列 $\{y_t\}$ 。当 $j_{m-1} \leq t \leq j_m - 2$ 时, 如果 $m$ 为奇数,  $i_t = 2$ ; 否则 $i_t = 3$ 。且由上一步结果知不论 $m$ 是否为奇数, 我们总能得到

$$y_{t+1} = g_{i_t}(t) = \frac{\Delta_m + 1}{(\Delta_m - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) - 1)(\Delta_m - (t + \frac{1}{2} - j_{m-1}))};$$

当 $t = j_m - 1$ 时, 如果 $m$ 为奇数,  $i_t = 2$ ; 否则 $i_t = 3$ 。且由上一步结果, 不论 $m$ 是否为奇数, 总能得到

$$y_{t+1} = g_{i_t}(t) = \frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6}.$$

由以上结果, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 显然有

$$y_{j_m} = \frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6} = \frac{2^{m-1}}{3} + e + \frac{5}{6} \rightarrow \infty$$

并且, 可以证得对任意固定的正整数 $l > 0$ ,

$$y_{j_m - l} \rightarrow \infty.$$

此时我们也注意到

$$y_{j_{m+1}} = \frac{\Delta_{m+1} + 1}{(\Delta_{m+1} - \frac{1}{2} - 1)(\Delta_{m+1} - \frac{1}{2})} = \frac{2^m + 1}{(2^m - \frac{3}{2})(2^m - \frac{1}{2})} \rightarrow 0.$$

且可以证得对任意固定的正整数  $l > 0$ , 有

$$y_{j_m+l} \rightarrow 0.$$

(5) 这样当  $k = 2, 3$  时, 我们可以定义函数  $f_k(x)$ 。则  $f_k(y_t) = f(y_t) + w_{t+1} - g_k(t) = 1 - g_k(t)$ 。

当  $j_{m-1} \leq t \leq j_m - 2$  时, 如果  $m$  为一奇数, 则

$$\begin{aligned} f_2(y_t) &= 1 - \frac{\Delta_m+1}{(\Delta_m-(t+\frac{1}{2}-j_{m-1})-1)(\Delta_m-(t+\frac{1}{2}-j_{m-1}))}, \\ f_3(y_t) &= 1 - \frac{\Delta_m-e}{\Delta_m}; \end{aligned}$$

否则

$$\begin{aligned} f_2(y_t) &= 1 - \frac{\Delta_m-e}{\Delta_m}, \\ f_3(y_t) &= 1 - \frac{\Delta_m+1}{(\Delta_m-(t+\frac{1}{2}-j_{m-1})-1)(\Delta_m-(t+\frac{1}{2}-j_{m-1}))}. \end{aligned}$$

当  $t = j_m - 1$  时, 如果  $m$  为一奇数, 则

$$\begin{aligned} f_2(y_t) &= 1 - \left(\frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6}\right), \\ f_3(y_t) &= 1 - \frac{\Delta_m-e}{\Delta_m}; \end{aligned}$$

否则

$$\begin{aligned} f_2(y_t) &= 1 - \frac{\Delta_m-e}{\Delta_m}, \\ f_3(y_t) &= 1 - \left(\frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6}\right); \end{aligned}$$

(6) 最后我们验证当  $k = 2, 3$  时, 函数  $f_k(x)$  的一些性质。我们以函数  $f_2$  为例, 可类似分析函数  $f_3$ 。

首先来证明对函数  $f_2$  假设条件 A0 成立。我们仅需考虑  $y_t$  的那些无界子列, 验证  $f_2(y_t)$  相应的值是有界还是发散到无穷。例如子列  $y_{j_m+1} \rightarrow 0$ , 且相应的

$$\begin{aligned} f_2(y_{j_{2n+1}}) &\rightarrow 1, \\ f_2(y_{j_{2n-1}+1}) &= 1 - \frac{\Delta_m-e}{\Delta_m}, \end{aligned}$$

因此  $\{f_2(y_{j_m+1})\}$  有界。

接下来考虑那些发散到无穷的子列。例如已知  $y_{j_m} \rightarrow \infty$ , 则相应的有

$$\begin{aligned} f_2(y_{j_{2n}}) &\rightarrow 1, \\ f_2(y_{j_{2n-1}}) &= 1 - \frac{\Delta_m-e}{\Delta_m} \rightarrow 0; \end{aligned}$$

这表明函数 $f_2$ 振荡无限次。对另一例子 $y_{j_{m-1}} \rightarrow \infty$ ，相应地有

$$\begin{aligned} f_2(y_{j_{2n-1}}) &= 1 - \frac{\Delta_m - e}{\Delta_m} \rightarrow 0, \\ f_2(y_{j_{2n-1}-1}) &= 1 - \left(\frac{1}{3}\Delta_m + e + \frac{5}{6}\right) \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

显然，以上讨论表明函数 $f_2$ 非常复杂。

进一步关于函数 $f_2$ 的研究表明：假设AL（线性增长条件）对函数 $f_2$ 成立，即存在常数 $A > 0, A' > 0$ ，使得

$$|f_2(y_t)| \leq A|y_t| + A', \forall t > 0.$$

所以这个例子也表明一般来说假设AL不能保证系统输出序列 $\{y_t\}$ 的有界性。

不过通过简单计算，对 $j_{m-1} \leq t < j_m$ ，我们有

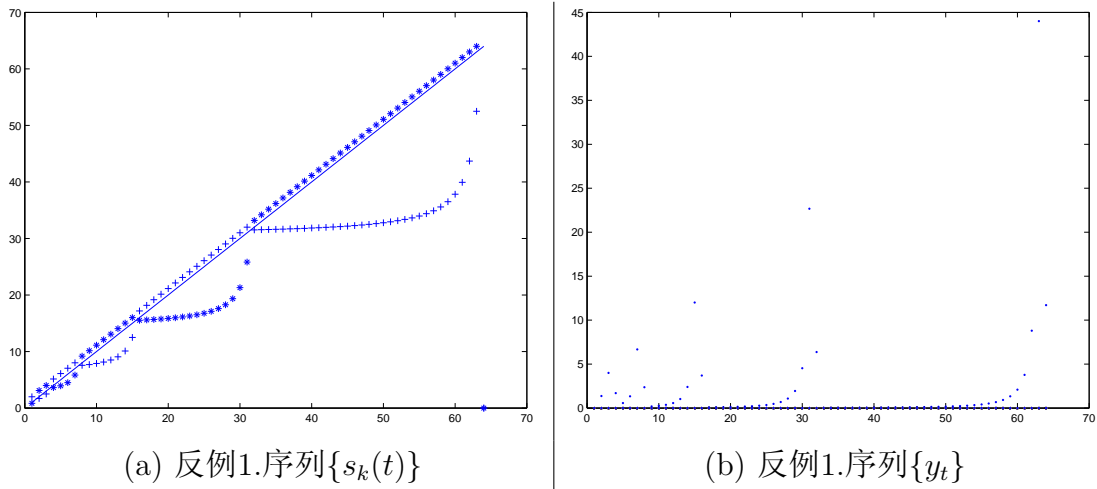
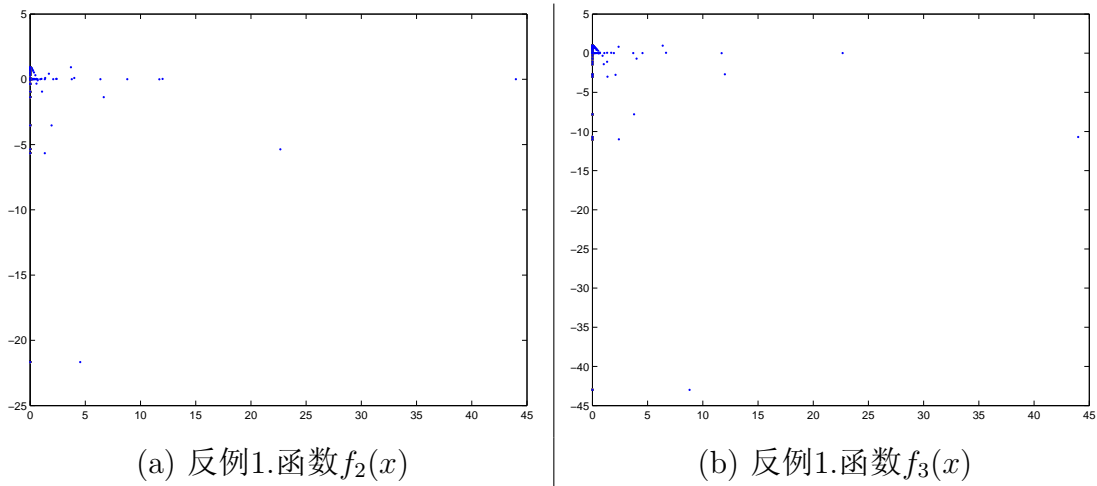
$$R_t \triangleq \sum_{n=1}^t |y_n| < wt + m(e+1),$$

从而

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \leq w < \infty.$$

因此在平均意义上这一例子中系统的输出序列 $\{y_t\}$ 有界，这与定理7.1是一致的。□

**图的说明：**图7.1(a)中显示了序列 $\{s_k(t)\}$ ，横坐标为 $t$ ，直线、‘+’、‘\*’分别对应于 $k = 1, 2, 3$ 。图7.1(b)中显示了序列 $\{y(t)\}$  ( $k = 1, 2, 3$ )，横坐标为 $t$ 。图7.2(a)中显示了函数 $f_2$ 图像上的一部分点，横坐标为 $y_t$ ，纵坐标对应于 $f_2(y_t)$ 。图7.2(b)中显示了函数 $f_2$ 图像上的一部分点，( $k = 1, 2, 3$ )，横坐标为 $y_t$ ，纵坐标对应于 $f_3(y_t)$ 。

图 7.1: 反例1.序列 $\{s_k(t)\}$ 和 $\{y_t\}$ 图 7.2: 反例1.函数 $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$ 

#### 7.4.2 反例2

基于上一反例，我们给出另一反例来说明在去掉假设AL的情况下，即使在平均意义下，系统输出序列 $\{y_t\}$ 也可以是无界的。因此这一例子表明一般来说定理7.1的条件不能再弱。

下面我们来构造反例。方法类似于上一反例，不同之处在于把上一反例中的 $e$ 替换为 $\{e_n\}$ ，且相应地必须重新定义 $\Delta_n$ 和 $j_n$ 。

假设我们有三个模型( $M = 3$ )且第一个模型为真实系统, 即 $f_1(x) \equiv f(x)$ 。为简单起见, 取 $f(x) \equiv 0$ ,  $w_t \equiv w = 1$ 。根据以上提到的构造过程, 我们仅需对 $k = 1, 2, 3$ , 给出序列 $\{s_k(t)\}_{t=1}^{\infty}$ 。显然对模型1我们有 $g_1(t) = w_{t+1} = w$ , 从而 $s_1(t) = wt$ 。下面给出 $s_2(t)$ 和 $s_3(t)$ 的构造过程。

令 $j_0 = 1$ 。定义

$$\begin{aligned}\Delta_n &= n \cdot n!, \\ j_n &= 1 + \sum_{l=1}^n \Delta_l = (n+1)!, \\ e_n &= \frac{1}{2}n \cdot n!,\end{aligned}$$

接着可以定义函数

$$\begin{aligned}h_n(x) &= \frac{x}{\Delta_{n+1-x}}, \\ d_n(x) &= h_n(x+1) - h_n(x) = \frac{x+1}{\Delta_{n-x}} - \frac{x}{\Delta_{n-x+1}} = \frac{\Delta_{n+1}}{(\Delta_{n-x-1})(\Delta_{n-x})}.\end{aligned}$$

对每一正整数 $t$ , 必存在一个相应的整数 $m$ 使得

$$j_{m-1} \leq t < j_m.$$

如果 $m$ 为奇数, 则可定义

$$\begin{aligned}s_2(t) &= h_m(t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2}, \\ s_3(t) &= \frac{\Delta_m - e_m}{\Delta_m}(t - j_{m-1}) + j_{m-1} + e_m;\end{aligned}$$

否则, 定义

$$\begin{aligned}s_2(t) &= \frac{\Delta_m - e_m}{\Delta_m}(t - j_{m-1}) + j_{m-1} + e_m, \\ s_3(t) &= h_m(t + \frac{1}{2} - j_{m-1}) + j_{m-1} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

对这一例子我们可以作与上一例子类似的分析。为节省空间, 在此略去分析细节。由分析可知假设AL对这一例子不成立。经计算可得, 当 $m \rightarrow \infty$ 时

$$y_{j_m} = \frac{1}{3}\Delta_m + e_{m+1} + \frac{5}{6} = \frac{1}{3}m \cdot m! + (m+1) \cdot (m+1)! + \frac{5}{6} \rightarrow \infty$$

显然

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{j_m}}{j_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{3(m+1)} + m + 1 \right) = \infty$$

从而

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R_t}{t} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{y_{j_m}}{j_m} = \infty.$$

因此系统输出序列 $\{y_t\}$ 在平均意义下不是有界的。这表明一般来说定理7.1的假设不能去掉。  $\square$

## 7.5 定理的证明

### 7.5.1 一些引理

首先给出一个引理，它是 $C_r$ 不等式的推广。

**引理 7.5.** 假设常数 $p > 0$ ，则对任意常数 $c > 1$ ，存在常数 $c' > 1$ 使得

$$(x + y)^p \leq c|x|^p + c'|y|^p, \forall x, y \in \mathcal{R}.$$

引理 7.5 的证明: 当 $0 < p \leq 1$ 时，由于 $(x + y)^p \leq |x|^p + |y|^p$ ，所以我们可以取任意 $c' > 1$ 。

现在我们考虑 $p > 1$ 情形。在此情况下取常数 $c' > 1$ 使得

$$\left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\frac{1}{c'}\right)^{\frac{1}{p-1}} = 1. \quad (7.9)$$

令 $z = \frac{|y|}{|x|}$ ，我们仅需证明对任意的 $z \geq 0$ ，

$$H(z) \triangleq (1 + z)^p - c - c'z^p \leq 0.$$

显然

$$H(0) = 1 - c < 0, \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = -\infty < 0.$$

现在我们计算 $H(z)$ 的驻点。注意到

$$H'(z) = p(1 + z)^{p-1} - pc'z^{p-1} = pz^{p-1}\left[\left(\frac{1+z}{z}\right)^{p-1} - c'\right],$$

因此显然驻点 $z = z_0$ 应该满足

$$\left(\frac{1+z_0}{z_0}\right)^{p-1} = c'.$$

由于当 $0 < z < z_0$ 时， $H'(z) > 0$ ，且当 $z > z_0$ 时， $H'(z) < 0$ ，所以函数 $H(z)$ 在 $z = z_0$ 点达到最大值。由(7.9)可得

$$c = (1 + z_0)^{p-1},$$

因此 $H(z)$ 的最大值为

$$H(z_0) = (1 + z_0)^p - c - c'z_0^p = (1 + z_0)^p - (1 + z_0)^{p-1} - \left(\frac{1+z_0}{z_0}\right)^{p-1}z_0^p = 0.$$

引理证毕。 □



**引理 7.6.** 假设  $\rho_K = \tilde{\rho}(F_K) < \epsilon$ , 则存在两个常数  $c_K, c'_K$  使得

$$|F_K(x, w)|^p \leq \epsilon^p |x|^p + c_K |w|^p + c'_K.$$

引理 7.6 的证明: 取  $\eta \in (\rho_K, \epsilon)$ , 则由  $\rho_K$  的定义, 必存在常数  $C_\eta \geq 0$  使得

$$|F_K(x)| \leq \eta |x| + C_\eta.$$

由引理 7.5, 对任意固定的  $c_0 > 1$ , 必存在相应的  $c'_0 > 1$  使得

$$|F_K(x, w)|^p \leq c_0 \eta^p |x|^p + c'_0 (C_\eta + |w|)^p, \forall x \in \mathcal{R}.$$

由于  $\eta < \epsilon$ , 我们可以选取  $c_0 > 1$  使得  $c_0 \eta^p < \epsilon^p$ , 并对  $(C_\eta + |w|)^p$  再次应用引理 7.5, 可知引理成立。□

**引理 7.7.** 在假设 AL 下, 对任意固定的  $l > 0$ , 可得

$$|y_t|^p \leq C_1^{(l)} |y_{t-l}|^p + a_0 + a_1 |w_t|^p + a_2 |w_{t-1}|^p + \cdots + a_l |w_{t-l+1}|^p. \quad (7.10)$$

其中  $C_1^{(l)}, a_0, a_1, \dots, a_l$  为正常数。

引理 7.7 的证明: 由假设 AL, 对任意的  $1 \leq i \leq M$  和  $x \in \mathcal{R}$ , 可得  $|F_i(x)| \leq A|x| + A'$ 。因此

$$|y_t| = |F_{i_{t-1}}(y_{t-1}, w_t)| \leq A|y_{t-1}| + (A' + |w_t|). \quad (7.11)$$

则反复使用引理 7.5, 可知对常数  $C_1^{(l)}, a_0, a_1, \dots, a_l$ , (7.10) 成立。□

### 7.5.2 定理 7.1 的证明

**定理 7.1 的证明:** 由算法 7.1.1 可知, 对任意的  $t > 0$

$$S_t(F_k) = \sum_{j=1}^t |F_k(y_{j-1}, w_j)|^p$$

在此应用引理 7.6 可得

$$\begin{aligned} S_t(F_K) &= \sum_{j=1}^t |F_k(y_{j-1}, w_j)|^p \\ &< \epsilon^p \sum_{j=1}^t |y_{j-1}|^p + c_K \sum_{j=1}^t |w_j|^p + c'_K t \\ &\triangleq W'_t. \end{aligned}$$

为方便起见, 我们引入以下记号:

$$R_n = \sum_{j=1}^n |y_j|^p, \quad (7.12)$$

$$W_n = \sum_{j=1}^n |w_j|^p, \quad (7.13)$$

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (7.14)$$

$$\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (7.15)$$

$$J = \{j \in N : |y_j| > d\}, \quad (7.16)$$

$$J_n = J \cap \bar{n} = \{j \in \bar{n} : |y_j| > d\}, \quad (7.17)$$

$$L = \{i_j : j \in J\} \text{的极限集}, \quad (7.18)$$

$$I(k) = \{j \in J : i_j = k\}. \quad (7.19)$$

并记 $|X|$ 为集合 $X$ 中元素数目。我们的目标是证明

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} R_n < \infty.$$

对任意的 $j \in N$ , 可得

$$y_j = F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j) = F_{i_{j-1}}(y_{j-1}) + w_j \quad (7.20)$$

由(7.16)可知, 对任意的 $j \notin J$ ,  $|y_j| \leq d$ 。如果集合 $J$ 仅有有限个元素, 则显然存在常数 $C_0$ 使得 $\sum_{j \in J} |y_j|^p \leq C_0$ 。因此

$$R_n = \sum_{j \in J_n} |y_j|^p + \sum_{j \in \bar{n} \setminus J_n} |y_j|^p \leq C_0 + d^p(n - |J_n|) \leq C_0 + d^p n. \quad (7.21)$$

从而 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} R_n \leq d^p < \infty$ 。

因此下面我们只需考虑集合 $J$ 有无穷个元素的情形。

由于 $|J| = \infty$ , 则 $\{i_j : j \in J\}$ 的极限集 $L$ 一定非空。由 $L$ 的定义, 对任意的 $k \notin L$ , 集合 $I(k)$ 只含有有限个元素; 且对任意 $k \in L$ , 集合 $I(k)$ 有无穷个元素。因此对某个常数 $C_1$ ,  $\sum_{k \notin L} \sum_{j \in I(k)} |y_j|^p \leq C_1$ 。从而

$$R_n = \sum_{k \in L} \sum_{j \in I(k) \cap \bar{n}} |y_j|^p + \sum_{k \notin L} \sum_{j \in I(k) \cap \bar{n}} |y_j|^p + \sum_{j \in \bar{n} \setminus J_n} |y_j|^p \leq \sum_{k \in L} \sum_{j \in I(k) \cap \bar{n}} |y_j|^p + C_1 + d^p n. \quad (7.22)$$

因此我们只需研究

$$r_n \triangleq \sum_{j \in I_L \cap \bar{n}} |y_j|^p = \sum_{j \in I_L \cap \bar{n}} |F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j)|^p,$$

其中

$$I_L = \bigcup_{k \in L} I(k) = \bigcup_{k \in L} \{j \in J : i_j = k\}.$$

令

$$L' = \{i_{j-1} : j \in I_L\} \text{的极限集}$$

并定义

$$I'(k') = \{j \in I_L : i_{j-1} = k'\}.$$

由于 $I_L$ 中有无穷多个元素, 所以集合 $L'$ 必为非空集合。由极限集的定义, 对任意 $k' \notin L'$ ,  $I'(k')$ 仅有有限个元素; 且对任意 $k' \in L'$ ,  $I'(k')$ 中有无穷多个元素。因此存在常数 $C_2 > 0$ 使得

$$\sum_{k' \notin L'} \sum_{j \in I'(k')} |F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j)|^p \leq C_2.$$

从而

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k' \notin L'} \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n}} |F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j)|^p + \sum_{k' \in L'} \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n}} |F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j)|^p \\ &\leq C_2 + \sum_{k' \in L'} \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n}} |F_{i_{j-1}}(y_{j-1}, w_j)|^p \end{aligned} \quad (7.23)$$

现在令 $J' = \{j \in J : j-1 \in J\}$ 。注意到对任意的 $j \in I'(k')$ ,  $i_{j-1} = k'$ , 可得

$$r_n \leq C_2 + \sum_{k' \in L'} [v_n^{(1)}(k') + v_n^{(2)}(k')] \quad (7.24)$$

其中

$$\begin{aligned} v_n^{(1)}(k') &\triangleq \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \cap J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p, \\ v_n^{(2)}(k') &\triangleq \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \setminus J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p. \end{aligned} \quad (7.25)$$

首先我们考虑项 $v_n^{(2)}(k')$ 。显然由 $J'$ 的定义可知 $j \notin J'$ 意味着 $j \notin J$ 或 $j-1 \notin J$ 。由于 $j \in I'(k') \subseteq I_L \subseteq J$ , 必有 $j-1 \notin J$ 。由 $J$ 的定义, 必有 $|y_{j-1}| \leq d$ 。且由基本假设A0知存在常数 $C_d > 0$ 使得当 $|x| \leq d$ 时,  $|F_i(x)| \leq C_d$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ )。因此

$$v_n^{(2)}(k') = \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \setminus J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p \leq \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \setminus J'} (C_d + |w_j|)^p. \quad (7.26)$$

从而可得

$$r_n \leq C_2 + \sum_{k' \in L'} [v_n^{(1)}(k') + v_n^{(2)}(k')] \leq C_2 + \sum_{j \in \bar{n} \setminus J'} (C_d + |w_j|)^p + \sum_{k' \in L'} v_n^{(1)}(k') \quad (7.27)$$

下面我们仅需考虑

$$v_n^{(1)}(k') = \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \cap J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p.$$

如果  $I'(k') \cap J'$  为一包含有限个元素的集合, 则显然存在常数  $C_3 > 0$  使得

$$\sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \cap J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p \leq C_3,$$

从而  $v_n^{(1)}(k') \leq C_3$ 。因此对任意的  $k' \in L'$ , 我们仅需考虑  $I'(k') \cap J'$  为包含无穷个元素的情形。

为继续分析, 我们首先证明  $L' = L$ 。令  $L_0$  为  $\{i_t\}_{t=1}^\infty$  的极限集。显然  $L \subseteq L_0, L' \subseteq L_0$ 。令  $J = \{\bar{j}_1, \bar{j}_2, \bar{j}_3, \dots\}, \bar{j}_1 < \bar{j}_2 < \bar{j}_3 < \dots$ 。由  $i_t$  的定义, 对任意正整数  $t: \bar{j}_m \leq t < \bar{j}_{m+1}$ , 可得  $i_t = i_{\bar{j}_m}$ ; 则由  $L$  与  $L_0$  的定义, 可得  $L_0 \subseteq L$ , 从而有  $L = L_0$ 。类似地, 对任意的正整数  $t: \bar{j}_{m-1} \leq t < \bar{j}_m$ , 可知  $i_t = i_{\bar{j}_{m-1}} = i_{\bar{j}_m-1}$ ; 则由  $L$  与  $L'$  的定义知  $L \subseteq L'$ , 这样  $L' = L_0 = L$ 。

令  $j_0 = 1$ 。对每个固定的  $k' \in L'$ , 假设  $I'(k') \cap J' = \{j_1, j_2, j_3, \dots\}, j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ 。则显然对每个  $m$ , 有  $i_{j_m-1} = k'$  成立。对每个  $n > 0$ , 存在相应的  $T = T(n) > 0$  使得  $j_T \leq n < j_{T+1}$ , 因此  $I'(k') \cap \bar{n} \cap J' = \{j_1, j_2, \dots, j_T\}$ 。

下面我们将考虑两个子情况: (a)  $i_{j_T} = i_{j_T-1} = k'$ ; (b)  $i_{j_T} \neq i_{j_T-1} = k'$ 。

(a) 因为  $i_{j_T} = k'$ , 所以由  $i_t$  的定义

$$k' = i_{j_T} = \arg \min_k S_{j_T}(F_k), \quad (7.28)$$

从而有

$$S_{j_T}(F_{k'}) \leq S_{j_T}(F_K) \leq W'_{j_T} \leq W'_n. \quad (7.29)$$

因此可以得到

$$\begin{aligned} v_n^{(1)}(k') &= \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \cap J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p \\ &\leq \sum_{t=1}^{j_T} |F_{k'}(y_{t-1}, w_t)|^p = S_{j_T}(F_{k'}) \\ &\leq W'_n. \end{aligned} \quad (7.30)$$

(b) 由于  $i_{j_T} \neq k'$ , 所以一般来说(7.29)与(7.30)不成立。然而因  $i_{j_{T-1}} = k'$ , 类似地可得

$$S_{j_{T-1}}(F_{k'}) \leq S_{j_T-1}(F_{k'}) \leq S_{j_T-1}(F_K) \leq W'_{j_{T-1}} \leq W'_n. \quad (7.31)$$

从而由引理7.7,

$$\begin{aligned} v_n^{(1)}(k') &= \sum_{j \in I'(k') \cap \bar{n} \cap J'} |F_{k'}(y_{j-1}, w_j)|^p \\ &\leq \sum_{t=1}^{j_{T-1}} |F_{k'}(y_{t-1}, w_t)|^p + |y_{j_T}|^p \\ &= S_{j_{T-1}}(F_{k'}) + |y_{j_T}|^p \\ &\leq W'_n + (C_1^{(l)} |y_{j_T-l}|^p + a_0 + a_1 |w_{j_T}|^p + a_2 |w_{j_T-1}|^p + \cdots + a_l |w_{j_T-l+1}|^p). \end{aligned} \quad (7.32)$$

现在我们选择正整数  $l \leq |L|$  如下:

(b.1) 如果存在  $1 < s \leq |L|$  使得  $j_T - s \notin J$ , 则取  $l = s$ . 在此情况下可得

$$|y_{j_T-l}| < d.$$

(b.2) 否则, 对  $s = 0, 1, 2, \dots, |L|$ , 必有  $j_T - s \in J$ . 对足够大的  $n$ , 即对足够大的  $T$ , 有

$$i_{j_T-s} \in L = L'.$$

显然必存在  $0 \leq s' < s \leq |L|$  使得

$$i_{j_T-s'} = i_{j_T-s} = k \in L,$$

从而

$$S_{j_T-s'}(F_k) \leq W'_{j_T-s'}.$$

然后我们可以取  $l = s - 1$ , 得到

$$\begin{aligned} |y_{j_T-l}|^p &= |F_{i_{j_T-s-1}}(y_{j_T-s}, w_{j_T-s+1})|^p \\ &\leq S_{j_T-s+1}(F_k) \\ &\leq S_{j_T-s'}(F_k) \\ &\leq W'_{j_T-s'} \leq W'_n. \end{aligned}$$

因此基于(b.1)与(b.2), 可得

$$\begin{aligned} v_n^{(1)}(k') &\leq W'_n + C_1^{(l)} \max(d^p, W'_n) + a_0 + a_1 |w_{j_T}|^p + a_2 |w_{j_T-1}|^p + \cdots + a_l |w_{j_T-l+1}|^p \\ &\leq CW'_n + C', \end{aligned} \quad (7.33)$$

其中常数 $C$  (最差情形) 可以取为

$$C = 1 + C_1^{(|L|)} + \max(a_1, a_2, \dots, a_{|L|}).$$

综合情形(a)与(b), 对任意固定的 $k' \in L'$ , 可得

$$\sum_{k' \in L'} v_n^{(1)}(k') = |L'|CW'_n + |L'|C' \quad (7.34)$$

因此

$$r_n \leq C_2 + \sum_{k' \in L'} [v_n^{(1)}(k') + v_n^{(2)}(k')] \leq \sum_{j \in \bar{n} \setminus J'} (C_d + |w_j|)^p + |L'|CW'_n + \text{常数}. \quad (7.35)$$

由 $W'_t$  与 $R_t$ 的定义, 可得

$$W'_n = \epsilon^p R_{n-1} + c_K W_n + c'_K n.$$

因此最终有

$$\begin{aligned} R_n &\leq r_n + C_1 + d^p n \\ &\leq \sum_{k' \in L'} v_n(k') + C_2 + C_1 + d^p n \\ &\leq |L'|C\epsilon^p R_{n-1} + (|L'|C \cdot c_K W_n + |L'|C \cdot c'_K n + d^p n + \text{常数}) \\ &\leq \alpha_\epsilon R_{n-1} + V_n \end{aligned} \quad (7.36)$$

其中

$$V_n \triangleq |L'|C \cdot c_K W_n + |L'|C \cdot c'_K n + d^p n + \text{常数}. \quad (7.37)$$

显然 $V_n = O(n)$ , 即对两个正整数 $\tilde{C}$ 与 $\tilde{C}'$ , 我们得到了 $V_n \leq \tilde{C}n + \tilde{C}'$ 。

接下来我们可以采用数学归纳法证明

$$R_n \leq \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} n + \frac{\tilde{C}'}{1-\alpha_\epsilon}. \quad (7.38)$$

事实上, 当 $n = 0$ 时显然成立。假设在 $n - 1$ 时成立, 即

$$R_{n-1} \leq \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} (n-1) + \frac{\tilde{C}'}{1-\alpha_\epsilon}.$$

则在时刻 $n$ 时, 由(7.36)可得

$$\begin{aligned} R_n &\leq \alpha_\epsilon R_{n-1} + \tilde{C}n + \tilde{C}' \\ &\leq \alpha_\epsilon \left( \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} (n-1) + \frac{\tilde{C}'}{1-\alpha_\epsilon} \right) + \tilde{C}n + \tilde{C}' \\ &= \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} n + \frac{\tilde{C}'}{1-\alpha_\epsilon} - \alpha_\epsilon \cdot \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} n + \frac{\tilde{C}'}{1-\alpha_\epsilon}. \end{aligned}$$

最后由(7.38), 立即可得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} R_n \leq \frac{\tilde{C}}{1-\alpha_\epsilon} < \infty.$$

证毕。 □

## 7.6 数值仿真

本节给出两个仿真例子以展示拟LS型算法的可用性。

**仿真例子1:** 考虑如下系统

$$x_{t+1} = \theta x_t \sin([\theta + \frac{1}{2}]x_t) + \sqrt{|\theta(x_t + 1)|} + u_t + w_{t+1}, \quad (7.39)$$

其中未知参数  $\theta \in \Theta$ ,  $\Theta = [0, 5]$ 。这里  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数。此例中参数  $\theta$  出现的方式使得多数已有的自适应控制器不能应用。我们应用拟LS型算法来镇定该系统。对任意  $\theta \in \Theta_k = [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ , 我们可以取鲁棒控制器

$$u_t^{(k)} = -kx_t \sin(kx_t). \quad (7.40)$$

令模型集  $\mathcal{F}_0 = \{f_1, f_2, \dots, f_5\}$ , 其中  $f_k(x) = kx \sin(kx)$ 。显然, 对任意  $\theta \in [1, 5]$  和函数  $f(x; \theta) = \theta x_t \sin([\theta + \frac{1}{2}]x_t) + \sqrt{|\theta(x_t + 1)|}$ , 总存在一个相应的模型  $f_K \in \mathcal{F}_0$  使得  $\tilde{\rho}(f, f_K) < 1$ 。

本例中, 我们在图7.3(a) 和图7.3(b)中给出两次仿真, 每个子图中显示了仿真中的输出序列  $x_t$ 、控制序列  $u_t$ 、噪声序列  $w_t$  和切换序列  $i_t$ , 两图中参数  $\theta$  分别取为一个随机选取的固定常数和一系列随时间变化的正弦信号的一部分。噪声序列均取自标准高斯白噪声  $N(0, 1)$ , 在算法中我们取  $\alpha = 1, p = 1, d = 1$ 。图7.3(b) 仅用于说明拟LS型算法对时变参数也有一定的适应性。

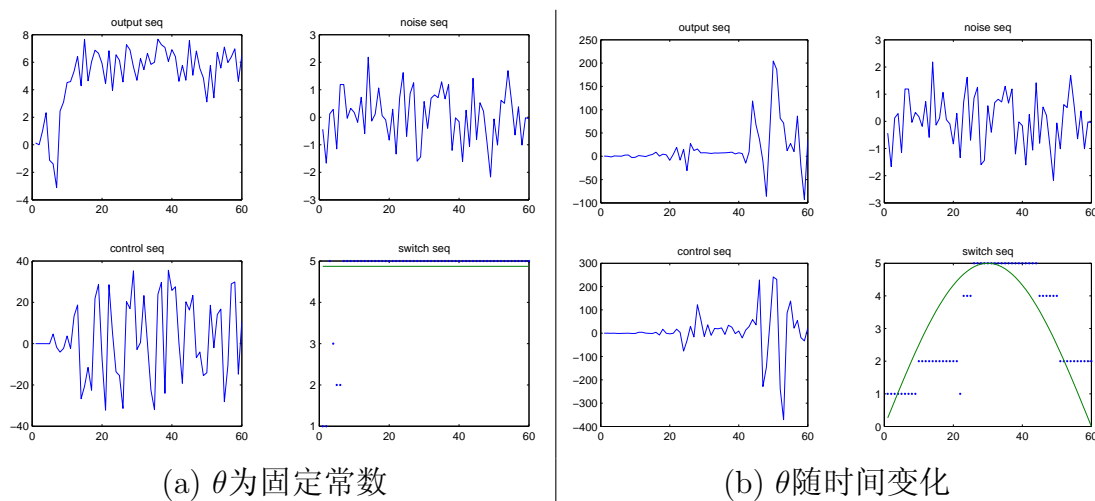


图 7.3: 仿真例子1

**仿真例子2:** 下面考虑的系统在文献[7]中曾作为一个例子,用基于“否定不可行控制器”的切换逻辑控制来跟踪给定信号。在本例中我们用拟LS型算法来镇定该系统。该系统中有两个小车,小车间有未知的弹性连接,其系统方程为一个连续时间线性模型:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\theta(x_1 - x_2) - \beta\dot{x}_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= -\theta(x_2 - x_1) - \beta\dot{x}_2,\end{aligned}\quad (7.41)$$

其中 $\theta$  是未知参数, $\beta$  是已知的常数。同[7]一样,我们假定 $x = [x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2]'$  可以观测并用于设计反馈,则系统可以重写为状态空间模型

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\Phi_0 + \theta\Phi_1)x(t) + G_u u(t) + G_d d(t), \\ \Phi_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}, \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ G_u &= [0, 0, 0, 1]', G_d = [0, 1, 0, 1]'\end{aligned}\quad (7.42)$$

其中未知参数 $\theta$  取值于区间 $\Theta = [0.05, 9]$ 。取采样周期为 $T = 0.1$ 秒,用Euler法进行离散化,可得到一个离散时间模型

$$x_{t+1} = A_\theta x_t + B u_t + w_{t+1}. \quad (7.43)$$



显然系统(7.43) 是一个单输入多输出的线性系统。由于 $\theta$ 可能的范围较大, 不可能设计一个公共的线性控制器 $u_t = -Fx_t$  来保证受控对象的稳定性。因此, 我们把区间 $\Theta$ 分成若干个小区间 $\Theta_i, i = 1, 2, \dots, M$ , 然后针对每个小区间的 $\theta \in \Theta_i$  分别设计一个鲁棒稳定的线性控制器 $u_t^{(i)} = -F_i x_t$ 。令 $\theta^{(i)}$ 为区间 $\Theta_i$ 的中心点, 并记 $A^{(i)}$ 为相应的 $A_\theta$ , 然后对线性时不变系统 $(A^{(i)}, B)$ 我们可用线性二次指标方法来设计 $F_i$ 。在此例中, 我们用7个区间来覆盖 $\Theta$ :  $[0.05, 0.1], [0.1, 0.2], [0.2, 0.5], [0.5, 1], [1, 2], [2, 5], [5, 9]$ 。(注: 选取的区间要保证控制器 $u_t^{(i)}$ 能够对所有 $\theta \in \Theta_i$ 镇定系统。此处用的方法只是较简单的一种, 还可以使用LMI[136]等其它方法来设计 $F_i$ 。另外, 关于线性系统结构化奇异值[3, 9, 29]等方面的研究有助于对区间 $\Theta$ 的划分提供一定的理论指导。)

在此仿真中, 噪声干扰 $d_t$ 取自 $\sigma = 0.5$ 的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ , 我们使用如下简单的拟LS型自适应控制律 $u_t = -F_{i_t} x_t$  这里 $i_t = \arg \min_k S_t(k)$ ,

$$S_t(k) = \sum_{j=1}^t \|x_j - Bu_{j-1} - BF_k x_{j-1}\|^2,$$

此处 $\|\cdot\|$ 表示常用的向量范数。设系统未知参数按如下方式随时间随机变化:  $\theta(t) = 7.5 + 2\epsilon_t$ , 其中 $\epsilon_t$ 取自标准正态分布 $N(0, 1)$ 。图7.4的四个子图分别显示了序列 $x_t^{(1)}, u_t, w_t$ 和 $\theta^{(i_t)}$ , 其中 $x_t^{(1)}$ 表示 $x_t$ 的第一个分量。从这一仿真中, 我们可以看出尽管参数 $\theta$ 随时间变化非常明显, 拟LS型算法仍能很快使系统稳定。这个例子说明拟LS型算法并不限于简单的一维情形。

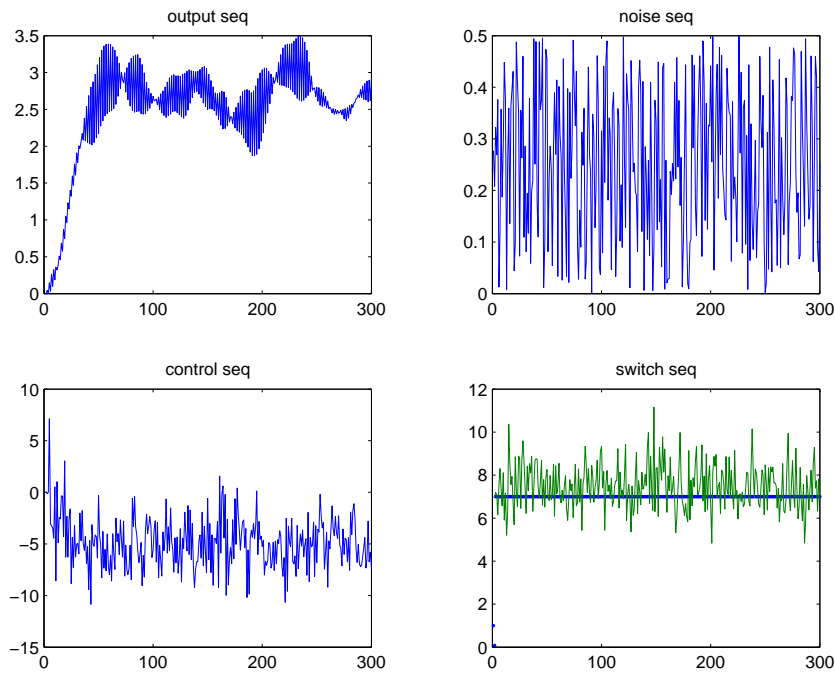


图 7.4: 仿真例子2

从两个仿真例子可以看出，拟LS型算法非常适合于未知参数不变或未知参数在某数值附近波动的不确定性系统，不过对未知参数可随时间变化的一些情形拟LS型算法也有一定的适应性。下一章中还将看到，拟WLS型算法更适合于未知参数可随时间明显变化的情形。

## 7.7 本章小结

本章对有限模型自适应控制问题，提出并研究了拟LS型算法。我们对此算法在线性增长假设下证明了闭环系统的 $p$ -平均稳定性。我们还构造了两个反例说明这一结果一般来说不能再改进。我们进一步把主要结果应用到了具有参数不确定性的非线性系统中。仿真例子说明了拟LS型算法的有效性。

## 第八章 拟WLS型算法及分析

在本章中我们对有限模型自适应控制问题，提出并研究了拟WLS型算法，该算法借鉴了遗忘因子加权最小二乘算法的思想，由于对历史信息以指数速度遗忘，所以该算法一定程度上更能适应时变的系统。对这一算法，我们将在较弱的条件下（允许非线性增长速度）证明其BIBO稳定性，即噪声有界时系统输出有界。同时我们将构造两个反例，来说明本章的结果一般来说不能再进一步改进。该算法也能对付无界噪声，但理论上还需要进一步的探索。

### 8.1 拟WLS型算法

类似前一章中的拟LS型算法，很自然的可以提出如下拟WLS型算法：

#### 算法8.1.1.

$(S^{\alpha,p,d})$  取以下的控制律

$$u_t = u_t^{(i_t)} = K_{i_t}(y_t), \quad (8.1)$$

其中

$$i_t = \begin{cases} \arg \min_k S_t(F_k), & \text{如果 } |y_t| > d \\ i_{t-1}, & \text{否则} \end{cases} \quad (8.2)$$

对  $1 \leq k \leq M$ ，定义  $S_t(F_k)$  如下：( $S_0(F_k) = 0$ )

$$S_t(F_k) = \alpha S_{t-1}(F_k) + |F_k(y_{t-1}, w_t)|^p. \quad (8.3)$$

其中  $d \geq 0$ ， $0 \leq \alpha < 1$ ， $p \geq 1$  可以任意选取。

#### 注8.1.1.

当  $d = 0$  时，可得  $i_t = \arg \min_k S_t(F_k)$ ；当  $p = 2, d = 0$  时，本算法变为(遗忘因子)WLS算法。如果  $\alpha = 0$ ，则此算法仅仅采用了上一步的历史信息。

#### 注8.1.2.

在算法8.1.1中，由(8.3)式可得

$$S_t(F_k) = \sum_{j=1}^t \alpha^{t-j} |F_k(y_{j-1}, w_j)|^p, \quad (8.4)$$

因此该算法权系数是由常数遗忘因子 $\alpha$ 生成的。也可以采用其它形式的权系数;后面的结果和证明可以无本质性困难地推广到采用一般权系数序列的类似算法。

由注8.1.1可知,算法8.1.1为遗忘因子加权最小二乘算法的推广,其稳健性和有效性在实际中可以灵活调整。类似的拟LS型算法(即 $\alpha = 1$ 情形)在前一章中已有研究。

## 8.2 主要结果

后面在分析拟WLS型算法时将用到以下假设:

**A1.** 对任意 $1 \leq i \leq M$ , 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, 要么(a)  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |F_i(x)| < \infty$ ; 要么(b)  $|F_i(x)| \rightarrow \infty$ 成立。

**A2.** 对任意 $1 \leq i \leq M$ , 要么(a)  $\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|F_i(x)|}{|x|} < 1$ ; 要么(b)  $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|F_i(x)|}{|x|} \geq 1$ 成立。

### 注8.2.1.

假设条件A1排除了函数 $|F_i(x)|$ 振荡无限次且振幅趋于无穷的情形。例如, 我们常用的函数(像多项式, 分式,  $e^x$ ,  $x^a$  ( $a > 0$ ), 对数函数, 正弦或余弦函数)都满足假设A1。

### 注8.2.2.

假设A2与假设A1不同, 因为: A2.(a)比A1.(a)弱; 而A2.(b)比A1.(b)强。

**定理 8.1.** 对系统(6.1), 如果满足以下两条件之一: (i)假设A1成立且存在模型 $H_K \in \mathcal{H}_0$ 使得 $\bar{\rho}(F_K) < r$ , 其中 $r$ 可为任意正常数; 或者(ii)假设A2成立且存在模型 $H_K \in \mathcal{H}_0$ 使得 $\tilde{\rho}(F_K) < 1$ 。则在算法8.1.1下, 闭环系统是BIBO稳定的。

**推论 8.2.** 对系统(6.5), 假设 $f \in \mathcal{F}_0$ 且假设A1或A2成立。则在算法8.1.1下, 闭环系统BIBO稳定。

## 8.3 两个反例

在这一部分中, 我们构造两个反例来说明: 对一个特殊的拟WLS型算法 $S^{0,1,0}$ , 一般来说不能去掉或减弱假设A1或A2。为简单起见, 我们仅对特殊的系统(6.5)来构造反例。

### 8.3.1 反例1

下面我们给出一个例子用来说明当去掉假设条件A1 或A2时, 在有界噪声情形, 算法 $S^{0,1,0}$ 不能保证 $\{y_t\}$ 的有界性。在此例中, 我们考虑 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ 的情形, 即不存在“未建模动态”。

考虑以下系统:

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1} \quad (8.5)$$

在此真实系统取为 $f(x) \equiv 0$ , 噪声为 $w_t \equiv -\pi$ 。取 $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ , 其中

$$\begin{aligned} f_1(x) &\equiv 0, \\ f_2(x) &= -\frac{\pi}{2} - (|x| + \pi)|\sin x|, \\ f_3(x) &= -\frac{\pi}{2} - (|x| + \pi)|\cos x|. \end{aligned} \quad (8.6)$$

则由算法8.1.1可得

$$y_{t+1} = -f_{i_t}(y_t) + w_{t+1} \quad (8.7)$$

其中

$$i_t = \arg \min_k S_t(F_k) = \arg \min_k |F_k(y_{t-1}, w_t)| = \arg \min_k |w_t - f_k(y_{t-1})|. \quad (8.8)$$

我们要证明在初始条件 $y_0 = \pi, y_1 = 3\pi/2$ 下闭环系统不稳定。

由 $i_t$ 的定义可知

$$\begin{aligned} S_1(F_1) &= \pi, S_1(F_2) = \frac{\pi}{2}, S_1(F_3) = \frac{3}{2}\pi, \\ \Rightarrow i_1 &= 2, y_2 = -F_2(y_1) + w_2 = 2\pi, \\ S_2(F_1) &= \pi, S_2(F_2) = 2\pi, S_2(F_3) = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow i_2 &= 3, y_3 = -F_3(y_2) + w_3 = \frac{5\pi}{2}, \\ S_3(F_1) &= \pi, S_3(F_2) = \frac{\pi}{2}, S_3(F_3) = \frac{5\pi}{2}, \\ \Rightarrow i_3 &= 2, y_4 = -F_2(y_3) + w_4 = 3\pi, \\ S_4(F_1) &= \pi, S_4(F_2) = 3\pi, S_4(F_3) = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow i_4 &= 3, y_5 = -F_3(y_4) + w_5 = \frac{7\pi}{2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8.9)$$

则由数学归纳法很容易证明对任意正整数 $k \in \mathcal{N}$ ,

$$i_{2k-1} = 2, i_{2k} = 3, y_{2k-1} = \frac{(2k+1)\pi}{2}, y_{2k} = (k+1)\pi. \quad (8.10)$$

显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = \infty. \quad (8.11)$$

证毕。  $\square$

### 注8.3.1.

容易验证: 对于本例, 线性增长条件成立。因此上一章中的拟LS型算法用于本例的话, 可以使得闭环系统有如下稳定性:

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t| < \infty; \quad (8.12)$$

但对于应用拟WLS型算法的本例, 由于序列 $\{y_t\}$ 发散到无穷, 故有

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |y_t| = \infty, \quad (8.13)$$

也就是说序列 $\{y_t\}$ 在平均意义下也无界。因此在有界噪声情形, 对算法 $S^{0,1,0}$ , 线性增长条件甚至不能保证闭环系统的平均稳定性。

### 8.3.2 反例2

本例中我们考虑 $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_0$ 的情形, 即存在“未建模动态”。为简单起见, 也取 $p = 1, d = 0$ 且 $\alpha = 0$ 。

考虑以下系统:

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1} \quad (8.14)$$

真实系统取为 $f(x) \equiv 0$ , 噪声取为 $w_t \equiv 0$ 。取 $\mathcal{F}_0 = \{f_1, f_2, f_3\}$ , 其中

$$\begin{aligned} f_1(x) &\equiv -\left(\frac{1}{2}x + 1\right), \\ f_2(x) &= \begin{cases} -2x & x \text{ 为奇数} \\ -\frac{x}{2} & x \text{ 为偶数} \\ \text{线性插值} & \text{其它} \end{cases} \\ f_3(x) &= \begin{cases} -\frac{x+1}{2} & x \text{ 为奇数} \\ -(2x+3) & x \text{ 为偶数} \\ \text{线性插值} & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.15)$$

则显然有

$$\tilde{\rho}(F_1) = \frac{1}{2} < 1, \quad (8.16)$$

且容易证明函数 $f_2, f_3$ 不满足假设条件A2, 但是满足假设条件A1中的A1.(b)。

由算法8.1.1可得

$$y_{t+1} = -f_{i_t}(y_t) + w_{t+1} = -f_{i_t}(y_t) \quad (8.17)$$

其中

$$i_t = \arg \min_k S_t(F_k) = \arg \min_k |F_k(y_{t-1}, w_t)| = \arg \min_k |f_k(y_{t-1})|. \quad (8.18)$$

我们将证明在初始条件 $y_0 = 0, y_1 = 1$ 下, 闭环系统不稳定。

由 $i_t$ 的定义可得

$$\begin{aligned} S_1(F_1) &= 1, S_1(F_2) = 0, S_1(F_3) = 3, \\ \Rightarrow i_1 &= 2, y_2 = -F_2(y_1) = 2, \\ S_2(F_1) &= \frac{3}{2}, S_2(F_2) = 2, S_2(F_3) = 1 \\ \Rightarrow i_2 &= 3, y_3 = -F_3(y_2) = 7, \\ S_3(F_1) &= 3, S_3(F_2) = 1, S_3(F_3) = 7, \\ \Rightarrow i_3 &= 2, y_4 = -F_2(y_3) = 14, \\ S_4(F_1) &= \frac{9}{2}, S_4(F_2) = 14, S_4(F_3) = 4 \\ \Rightarrow i_4 &= 3, y_5 = -F_3(y_4) = 31 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8.19)$$

下面我们采用数学归纳法来证明对任意正整数 $k \in \mathcal{N}$ , 有

$$i_{2k} = 3, i_{2k+1} = 2, y_{2k} = 2^{2k} - 2, y_{2k+1} = 2^{2k+1} - 1. \quad (8.20)$$

事实上, 假设对 $k-1$ 成立, 即

$$i_{2k-2} = 3, i_{2k-1} = 2, y_{2k-2} = 2^{2k-2} - 2, y_{2k-1} = 2^{2k-1} - 1, \quad (8.21)$$

则对 $k$ 有

$$\begin{aligned}
y_{2k} &= -f_2(y_{2k-1}) = 2(2^{2k-1} - 1) = 2^{2k} - 2, \\
S_{2k}(F_1) &= |f_1(y_{2k-1})| = 2^{2k-2} + \frac{1}{2}, \\
S_{2k}(F_2) &= |f_2(y_{2k-1})| = 2^{2k} - 2, \\
S_{2k}(F_3) &= |f_3(y_{2k-1})| = 2^{2k-2}, \\
\Rightarrow i_{2k} &= 3, \\
y_{2k+1} &= -f_3(y_{2k}) = 2(2^{2k} - 2) + 3 = 2^{2k+1} - 1, \\
S_{2k+1}(F_1) &= |f_1(y_{2k})| = 2^{2k-1}, \\
S_{2k+1}(F_2) &= |f_2(y_{2k})| = 2^{2k-1} - 1, \\
S_{2k+1}(F_3) &= |f_3(y_{2k})| = 2^{2k+1} - 1, \\
\Rightarrow i_{2k+1} &= 2.
\end{aligned} \tag{8.22}$$

因此显然可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| \rightarrow \infty. \tag{8.23}$$

本反例说明假设A2中的条件A2.(b) 不能用假设A1中更一般的条件A1.(b)代替。

□

## 8.4 定理的证明

在这一部分中,我们将分别在假设条件A1和A2下,给出定理8.1的严格证明。在给出证明之前我们先引进一些通用的记号。假设 $C_w \triangleq \sup_t |w_t| < \infty$ ,则由基本假设,对任意 $x \geq 0$ ,我们可以定义

$$\begin{aligned}
C_k(x) &= \sup_{|y| \leq x} |F_k(y)|, \\
C(x) &= \max\{C_1(x), C_2(x), \dots, C_M(x)\}.
\end{aligned} \tag{8.24}$$

显然 $C_k(x)$ 与 $C(x)$ 为非递减函数。

### 8.4.1 假设A1下的证明:

定义

$$\begin{aligned}
I &= \{1 \leq k \leq M : \limsup_{|x| \rightarrow \infty} |F_k(x)| < \infty\}, \\
I' &= \{1 \leq k \leq M : |F_k(x)| \rightarrow \infty \text{ 当 } x \rightarrow \pm\infty\}.
\end{aligned} \tag{8.25}$$

由假设A1可知 $I \cup I' = \{1, 2, \dots, M\}$ 。且由 $I$ 的定义,对任意 $k \in I$ ,

$$C_k(x) \leq D_k = \sup_{x \in \mathcal{R}} C_k(x) \leq D \triangleq \max_{i \in I} D_i. \tag{8.26}$$



并由 $I'$ 的定义, 对任意 $k \in I'$ , 可以定义

$$\begin{aligned} C'_k(z) &= \sup\{|y| : |F_k(y)| < z\}, \\ C'(z) &= \max_{k \in I'} C'_k(z). \end{aligned} \quad (8.27)$$

显然 $C'_k(z)$ 与 $C'(z)$ 也是非递减的函数。

闭环系统为

$$y_{t+1} = F_{i_t}(y_t, w_{t+1}). \quad (8.28)$$

考虑以下情形:

情形1: 若 $|y_t| \leq d$ , 则显然

$$|y_{t+1}| \leq |F_{i_t}(y_t)| + |w_{t+1}| \leq C_{i_t}(d) + C_w \leq C(d) + C_w. \quad (8.29)$$

情形2: 若 $|y_t| > d$ , 则由 $i_t$ 的定义知

$$i_t = \arg \min_k S_t(F_k), \quad (8.30)$$

因此

$$|F_{i_t}(y_{t-1}, w_t)|^p \leq S_t(F_{i_t}) \leq S_t(F_k). \quad (8.31)$$

注意到 $\bar{\rho}(F_K) \leq r$ , 则必存在常数 $Y \geq 0$ 使得当 $|x| \geq Y$ 时 $|F_K(x)| \leq r$ 。且由 $S_t(F_k)$ 的定义, 知

$$S_t(F_K) = \alpha S_{t-1}(F_K) + |F_K(y_{t-1}, w_t)|^p \leq \alpha S_{t-1}(F_K) + C'_w, \quad (8.32)$$

其中

$$C'_w = [C_w + \max(r, C_K(Y))]^p. \quad (8.33)$$

通过重复以上不等式, 很容易得到

$$S_t(F_K) \leq \frac{C'_w}{1-\alpha}. \quad (8.34)$$

从而可得

$$|F_{i_t}(y_{t-1})| \leq |F_{i_t}(y_{t-1}, w_t)| + |w_t| \leq [S_t(F_K)]^{\frac{1}{p}} + C_w \leq \left[\frac{C'_w}{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{p}} + C_w \triangleq C_\alpha. \quad (8.35)$$

子情形(i): 若  $i_t \in I$ , 则由  $I$  的定义必有

$$|y_{t+1}| = |F_{i_t}(y_t, w_{t+1})| \leq |F_{i_t}(y_t)| + |w_{t+1}| \leq C_{i_t}(|y_t|) + C_w \leq D_{i_t} + C_w \leq D + C_w \quad (8.36)$$

子情形(ii): 若  $i_t \in I'$ , 则由(8.35)与  $I'$  的定义可得

$$|y_{t-1}| \leq C'_{i_t}(C_\alpha) \leq C'(C_\alpha). \quad (8.37)$$

从而

$$\begin{aligned} |y_t| &= |F_{i_{t-1}}(y_{t-1}, w_t)| \\ &\leq |F_{i_{t-1}}(y_{t-1})| + |w_t| \\ &\leq C_{i_{t-1}}(C'(C_\alpha)) + C_w \\ &\leq C(C'(C_\alpha)) + C_w. \end{aligned} \quad (8.38)$$

类似地

$$|y_{t+1}| = |F_{i_t}(y_t, w_{t+1})| \leq C(C(C'(C_\alpha)) + C_w) + C_w. \quad (8.39)$$

总之, 我们只需取

$$C_y = \max\{C(d) + C_w, D + C_w, C(C(C'(C_\alpha)) + C_w) + C_w\}, \quad (8.40)$$

则可证明对任意的  $t \geq 2$

$$|y_t| \leq C_y. \quad (8.41)$$

证毕。  $\square$

#### 8.4.2 假设A2下的证明:

定义

$$\begin{aligned} I &= \{1 \leq k \leq M : \limsup_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|F_k(x)|}{|x|} < 1\}, \\ I' &= \{1 \leq k \leq M : \liminf_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|F_k(x)|}{|x|} \geq 1\}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

则由假设A2可知  $I \cup I' = \{1, 2, \dots, M\}$ 。且由  $I$  的定义, 对任意的  $k \in I$  有

$$C_k(x) \leq \max_{k \in I} C_k(x) \leq \epsilon|x| + C_\epsilon, \quad (8.43)$$

其中  $C_\epsilon$  为一确定的正常数且  $\epsilon$  可取为

$$\epsilon \in (\max_{i \in I} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|F_i(x)|}{|x|}, 1). \quad (8.44)$$

由 $I'$ 的定义, 对任意 $k \in I'$ , 可以定义

$$C'_k = \sup\{|y| : |F_k(y)| \leq |y| + C_\epsilon + 2C_w\} \quad (8.45)$$

且

$$C' = \max_{k \in I'} C'_k. \quad (8.46)$$

显然对任意 $k \in I'$ ,  $C'_k \leq C' < \infty$ 成立。

闭环系统为

$$y_{t+1} = F_{i_t}(y_t, w_{t+1}). \quad (8.47)$$

$\alpha = 0$ :

考虑以下情形:

情形1: 若 $|y_t| \leq d$ , 则显然有

$$|y_{t+1}| \leq |F_{i_t}(y_t)| + |w_{t+1}| \leq C_{i_t}(d) + C_w \leq C(d) + C_w. \quad (8.48)$$

情形2: 若 $|y_t| > d$ , 则由 $i_t$ 的定义得

$$i_t = \arg \min_k S_t(F_k), \quad (8.49)$$

从而

$$|F_{i_t}(y_{t-1}, w_t)|^p \leq S_t(F_{i_t}) \leq S_t(F_k). \quad (8.50)$$

且由 $S_t(F_k)$ 的定义可得

$$S_t(F_K) = |F_K(y_{t-1}, w_t)|^p \leq [C_K(|y_{t-1}|) + C_w]^p. \quad (8.51)$$

由于

$$\limsup_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|F_K(x)|}{|x|} < 1, \quad (8.52)$$

根据集合 $I$ 的定义, 知 $K \in I$ , 从而有

$$C_K(|x|) \leq \max_{k \in I} C_k(|x|) \leq \epsilon|x| + C_\epsilon. \quad (8.53)$$

因此

$$S_t(F_K) \leq [C_K(|y_{t-1}|) + C_w]^p \leq [\epsilon|y_{t-1}| + C_\epsilon + C_w]^p. \quad (8.54)$$

所以

$$|F_{i_t}(y_{t-1})| \leq \|F_{i_t}(y_{t-1}, w_t)\| + |w_t| \leq \epsilon|y_{t-1}| + C_\epsilon + 2C_w. \quad (8.55)$$

然后我们考虑以下两个子情形:

子情形(i): 若  $i_t \in I$ , 则由  $I$  的定义可得

$$\begin{aligned} |y_{t+1}| &= |F_{i_t}(y_t, w_{t+1})| \leq |F_{i_t}(y_t)| + |w_{t+1}| \\ &\leq C_{i_t}(|y_t|) + C_w \leq \epsilon|y_t| + C_\epsilon + C_w \end{aligned} \quad (8.56)$$

子情形(ii): 若  $i_t \in I'$ , 则由(8.55)与  $I'$  的定义可得

$$|y_{t-1}| \leq C'_{i_t} \leq C'. \quad (8.57)$$

从而

$$\begin{aligned} |y_t| &= |F_{i_{t-1}}(y_{t-1}, w_t)| \\ &\leq |F_{i_{t-1}}(y_{t-1})| + |w_t| \\ &\leq C_{i_{t-1}}(C') + C_w \\ &\leq C(C') + C_w. \end{aligned} \quad (8.58)$$

类似的

$$|y_{t+1}| = |F_{i_t}(y_t, w_{t+1})| \leq C(C(C') + C_w) + C_w. \quad (8.59)$$

总之, 可得

$$|y_{t+1}| \leq \max\{C(d) + C_w, \epsilon|y_t| + C_\epsilon + C_w, C(C(C') + C_w) + C_w\} \leq \epsilon|y_t| + C_v, \quad (8.60)$$

其中

$$C_v \triangleq \max\{C(d) + C_w, C_\epsilon + C_w, C(C(C') + C_w) + C_w\}. \quad (8.61)$$

通过重复以上不等式, 对充分大的  $t$  立即可得

$$|y_t| \leq \frac{C_v}{1-\epsilon} \triangleq C_y. \quad (8.62)$$

证毕。

$0 < \alpha < 1$ :

闭环系统为

$$y_{t+1} = F_{i_t}(y_t, w_{t+1}) \quad (8.63)$$

且对  $i = 1, 2, \dots, M$ , 有

$$S_t(F_i) = \alpha S_{t-1}(F_i) + |F_i(y_{t-1}, w_t)|^p = \sum_{j=1}^t \alpha^{t-j} |F_i(y_{j-1}, w_j)|^p. \quad (8.64)$$

**第1步:** 记  $I(k) \triangleq \{t : i_t = k, |y_t| > d\}$ 。

我们要证明对任意的  $k \in I'$ , 集合  $\{y_{t-1}, t \in I(k)\}$  有界, 即对某个常数  $D_k$ , 有  $\sup_{t \in I(k)} |y_{t-1}| < D_k$ 。

事实上, 对任意的  $k \in I'$ , 如果  $I(k)$  仅包含有限个元素, 则显然  $\{y_{t-1}, t \in I(k)\}$  有界。下面我们只需考虑  $I(k)$  包含无穷多个元素的情形。在这种情形下, 我们采用反证法。

假设  $\{y_{t-1}, t \in I(k)\}$  是无界的, 则一定存在序列  $\{t_m\} \subseteq I(k)$  使得当  $m \rightarrow \infty$  时,  $|y_{t_m-1}| \rightarrow \infty$ 。由于  $k \in I'$  且  $\{w_t\}$  有界, 可知  $S_{t_m}(F_k) \geq |F_k(y_{t_m-1}) + w_{t_m}|^p \rightarrow \infty$ ; 且由  $I(k)$  的定义,  $k = i_{t_m} = \arg \min_i S_{t_m}(F_i)$ , 可得  $S_{t_m}(F_k) \leq S_{t_m}(F_K)$ ; 因此当  $m \rightarrow \infty$  时,  $S_{t_m}(F_K) \rightarrow \infty$ 。并由  $I$  与  $I'$  的定义可知, 存在一个充分大的常数  $Y > 0$ , 使得对所有的  $|x| > Y$ ,  $|F_k(x)| \geq |x| + C_w$  和  $|F_K(x)| \leq \epsilon|x| - C_w$  成立。所以

$$S_{t_m}(F_k) \geq \sum_{j \in J_{t_m}} \alpha^{t_m-j} |y_{j-1}|^p \triangleq V_{t_m} \quad (8.65)$$

$$S_{t_m}(F_K) \leq \sum_{j \in J_{t_m}} \alpha^{t_m-j} (\epsilon |y_{j-1}|)^p + \sum_{j \in J'_t} \alpha^{t_m-j} [C_K(Y) + C_w]^p \leq \epsilon^p V_{t_m} + \frac{[C_K(Y) + C_w]^p}{1-\alpha} \quad (8.66)$$

其中

$$J_t \triangleq \{1 \leq j \leq t : |y_{j-1}| > Y\}, J'_t \triangleq \{1 \leq j \leq t : |y_{j-1}| \leq Y\}. \quad (8.67)$$

注意到当  $m \rightarrow \infty$  时, 有  $S_{t_m}(F_K) \rightarrow \infty$ 。且由(8.66)可知当  $m \rightarrow \infty$  时,  $V_{t_m} \rightarrow \infty$ 。因此由(8.66)与(8.65), 对充分大的  $m$ , 可得  $\frac{S_{t_m}(F_K)}{S_{t_m}(F_k)} \leq \epsilon^p < 1$ 。这与  $S_{t_m}(F_k) \leq S_{t_m}(F_K)$  矛盾!

**第2步:** 下面我们证明  $\{y_t\}$  有界。

由第1步, 我们已经证明了

$$\sup\{|y_{t-1}| : i_t \in I', |y_t| > d\} < \max_{k \in I'} D_k \triangleq D, \quad (8.68)$$

因此若  $|y_t| > d$ ,  $i_t \in I'$  成立时, 有

$$|y_t| = |F_{i_{t-1}}(y_{t-1}) + w_t| \leq C(D) + C_w \quad (8.69)$$

否则, 以下两种情形必居其一: (i)  $|y_t| \leq d$ ; (ii)  $i_t \in I$ 。

在情形(ii), 如果  $i_{t-1} \in I'$ , 通过在时刻  $t-1$  再次应用第1步中结果, 可得

$$|y_{t-1}| \leq \max(d, C(D) + C_w) \triangleq D', \quad (8.70)$$

从而

$$|y_t| = |F_{i_{t-1}}(y_{t-1}) + w_t| \leq C(D') + C_w; \quad (8.71)$$

否则,  $i_{t-1} \in I$ , 于是有

$$|y_t| = |F_{i_{t-1}}(y_{t-1}) + w_t| \leq \epsilon|y_{t-1}| + C_\epsilon. \quad (8.72)$$

综上,

$$|y_t| \leq \max(D', C(D') + C_w, \epsilon|y_{t-1}| + C_\epsilon), \quad (8.73)$$

从而 $\{y_t\}$ 的有界性容易得证。  $\square$

### 8.4.3 关于证明的一些说明

在结束本节之前, 补充说明一下稳定性分析中的一些困难和思想。

显然在算法8.1.1下的闭环系统是一个特殊的混杂系统(切换系统), 具有混杂系统的一些特征, 因此分析混杂系统(参考[71]及其参考文献)的一些困难在分析算法8.1.1时也存在。然而在我们对算法8.1.1的分析中, 闭环系统与在文献中讨论的混杂系统模型有一些不同之处:

- 由假设A1或A2, 可以看出允许函数 $F_i$ 非线性增长(不必限于线性增长);
- 分析时对函数 $F_i, K_i$ 没要求明确的结构形式;
- 切换信号序列 $\{i_t\}$ 并不固定或提前知道路径, 它实际上依赖于当前状态以及历史信息;
- 噪声 $\{w_t\}$ 的存在能影响切换信号序列 $\{i_t\}$ , 因此切换序列一般来说不能精确预测;
- 从切换系统的角度看, 只需一个子系统稳定, 而其余子系统可以不稳定。

以上这些性质在一定程度上增加了数学分析中的困难。例如, 我们想通过 $y_{t+1} = F_{i_t}(y_t) + w_{t+1}$ 来估计 $y_{t+1}$ , 但是我们不知道 $i_t$ (它依赖于 $w_t, y_t, y_{t-1}$ , 等等); 没有函数 $F_{i_t}(\cdot)$ 的具体形式; 也不知道 $i_t$ 怎样随时间变化且一般不知道 $i_t$ 的统计性质(如频率或概率)。由于问题的这些特点, 所以研究切换系统常用的一些方法(比如共同Lyapunov函数方法、多Lyapunov函数方法、平均停留时间方法等)难以在此应用。

幸运地是, 算法8.1.1的特殊结构、模型个数的有限性、噪声的有界性以及看起来有点奇怪的假设A1或A2使得前面我们给出的严格分析成为可能。分析中一个主要思想是采用时刻 $t$ 之后的信息来反向估计 $y_t$ 大小。这种技巧在以往分析控制系统稳定性时是很少采用的, 而常采用的是用历史信息来估计现在的或将来的状态。为使反向估计成为可能, 我们提出了假设A1或A2, 这在分析中起了很大作用。并且前面构造的反例说明了这些假设一般来说不能去掉或减弱, 这在某种意义上表明假设条件的必要性。因此前面给出的证明实际上是对稳定性分析提出了一种新的方法, 除此之外在证明中采用了其它一些数学技巧, 在此不一一列举。

在无界(随机)噪声情形, 为得到好的稳定性结果需要克服更多的困难, 这需要进行进一步的探讨。

## 8.5 数值仿真

本节给出两个仿真例子以展示拟WLS型算法的可用性。两个仿真例子都说明拟WLS型算法能够对付无界噪声, 并且适用于未知参数随时间变化的系统。

**仿真例子1:** 本例中还用上一章仿真例子1中的系统。在算法中我们取 $\alpha = 0.5, p = 1, d = 1$ , 仿真的所有其它设置和上一章相同。噪声序列均取自标准高斯白噪声 $N(0, 1)$ , 可以看出图8.1(b)中输出信号的幅度明显小于图7.3(b)中输出信号的幅度, 并且算法对参数变化的响应速度也显得更快一些, 这说明拟WLS型算法对参数时变的系统比拟LS型算法往往有更好的适应性。

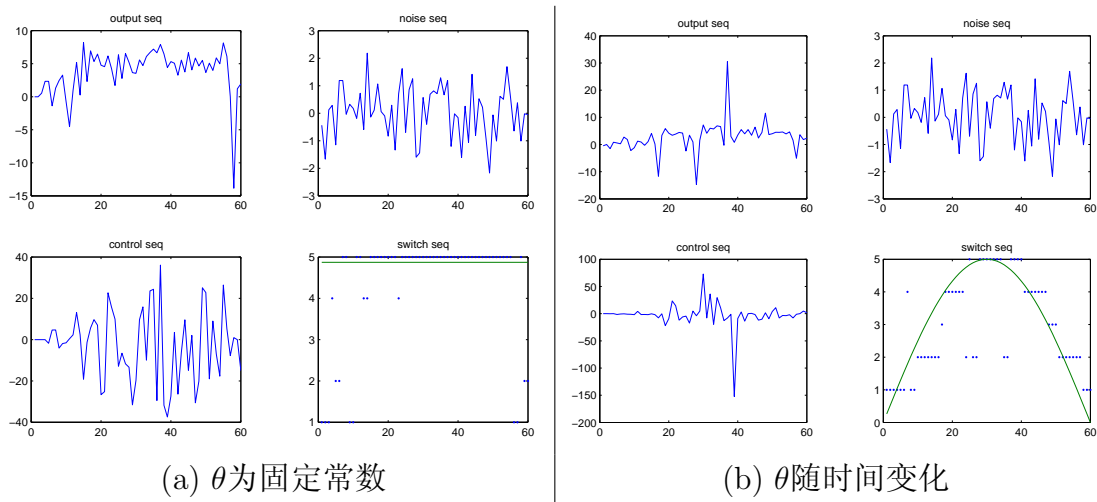


图 8.1: 仿真例子1

**仿真例子2:** 本例中还用上章仿真例子2中的系统, 除了取 $\alpha = 0.6$ 外, 所有其它仿真设置和上一章相同, 噪声干扰 $d_t$ 也取自 $\sigma = 0.5$ 的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 。这个例子说明拟WLS型算法也不限于简单的一维情形。

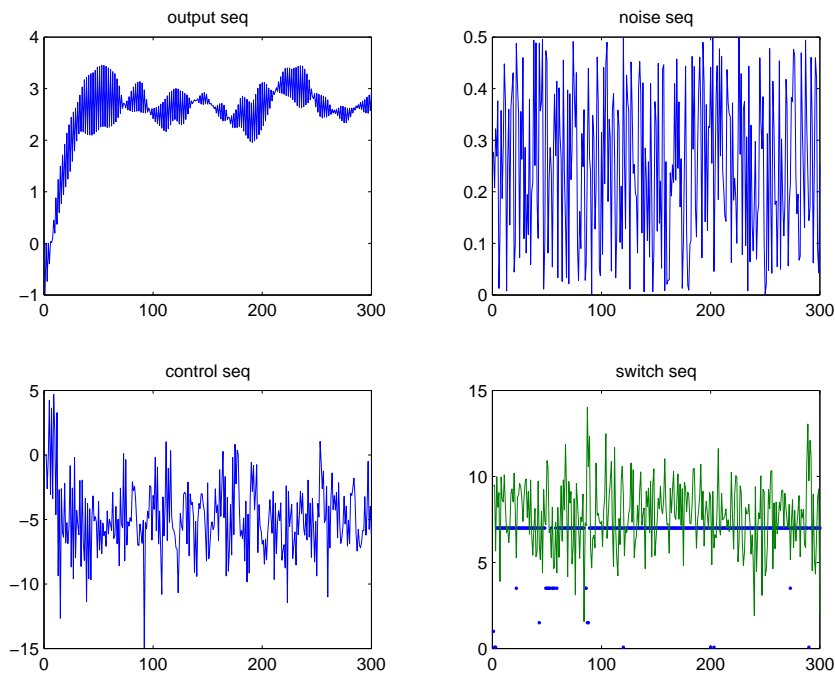


图 8.2: 仿真例子2



## 8.6 本章小结

在本章中我们对有限模型自适应控制问题。提出了拟WLS型算法来设计反馈控制律，在较弱的条件下我们证明了闭环系统是BIBO稳定的，且构造的两个反例说明我们提出的条件一般不能被去掉或减弱。本章算法稳定性分析中“反向估计”的思想在文献中很少见到，本章结果表明这一方法可用于分析较一般的切换非线性系统。

尽管通过仿真表明本章提出的拟WLS型算法能很好对付无界噪声，但其理论分析还有待进一步研究。由于分析中遇到的困难，为给出更完善的结果，可能还需要探索一些新方法。

## 第九章 其它几种算法及分析

本章将对有限模型自适应控制问题，讨论拟LS型算法和拟WLS型算法之外的其它一些算法。前两章的算法的闭环系统本质上都是切换非线性系统，而本章中的算法将基于其它几种不同的思想来设计，分别具有不同的特点。对这些算法，我们将分别在一定条件下，证明相应闭环系统的稳定性。这些结果和前两章的结果一起表明，当系统的内部不确定性本质上有限时，在很弱的条件下，存在合适的反馈控制律能够对付有限的内部不确定性。因此，本章对有限模型自适应控制问题给出了部分的回答，从而有助于进一步深刻理解反馈机制对付不确定性的能力。

### 9.1 几种算法的说明

本节中将对有限模型自适应控制问题提出几种不同于前两章的算法，它们基于不同的思想，并有着不同的性能、稳健性、瞬态行为或计算量。所以一般来说我们应该根据不同的情形选择合适的算法来满足应用中的不同需求。本部分开始的章节已经简单提到过这些算法的思想，本节中将给出这些算法的具体形式。为简单起见，本章中我们只考虑系统(6.5)。当考虑更一般的系统(6.1)时，本章的有些算法可能需要稍加推广或者加一定的限制条件，但设计这些算法的思想仍可以应用。

对无噪声（确定性）系统，可以证明：仅通过有限步就能正确辨识出真实系统(参见后面的命题9.1及其证明)。不过，在实际中噪声干扰总是存在的，因此命题9.1中采用的算法9.3.1并不具有实用价值，所以本节中我们提出的算法都针对有外部噪声干扰的系统。

#### 9.1.1 基于“否定不可行控制器”的方法

这种方法的基本思想是按一定顺序逐个尝试相应于每个模型的控制器 $C^{(i)}$ ，如果根据某个条件发现该控制器一定不可行，则切换到下一个控制器。那么什么样的条件可以用于否定不可行的控制器呢？显然这一条件（不妨称为条件A）必须满足两个性质：

1. 能镇定系统的控制器 $C^{(K)}$ 必须永远满足条件A；

2. 当使用不能镇定系统的控制器 $C^{(i)}$ 时, 必存在某一时刻使得条件A得不到满足。

以上性质中, 后者保证了根据条件A 最终一定可以排除掉不能镇定系统的控制器; 而前者保证不会出现所有控制器最终都被排除掉的情况, 这样基于“否定不可行控制器”的方法才能够顺利进行下去。根据模型个数的有限性, 我们可以看到这一方法必然在有限步后稳定于某个控制器上(注意并不一定稳定于控制器 $C^{(K)}$ 上), 当然这里的前提是系统的结构不随时间变化。

为展示“否定不可行控制器”的思想, 我们提出如下的简单算法:

#### 算法9.1.1.

假设 $W$ 为一足够大的常数。令 $\mathcal{P}_0 = \Phi, i_0 = 1, \bar{M} = \{1, 2, \dots, M\}$ 。取控制器为 $u_t = u_t^{(i_t)} = K_{i_t}(y_t)$ , 其中 $i_t$ 取值如下:

- (i) 若 $|y_t| \leq \max(W, |y_{t-1}|)$ , 则令 $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_{t-1}$ , 且取 $i_t = i_{t-1}$ ;  
(ii) 否则, 令 $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_{t-1} \cup \{i_{t-1}\}$ , 且任取 $i_t \in \bar{M} \setminus \mathcal{P}_t$ 。

#### 注9.1.1.

当噪声有界时, 如果取 $W$ 足够大则可用算法9.1.1; 不过这种算法对噪声无界情形不能应用。算法9.1.1在形式上很简单且由于它基于“否定不可行控制器”思想使得它相对容易分析, 这可以从后面关于算法9.1.1的BIBO稳定性证明中看出。基于类似思想的算法的本质缺点是它只能对付有界噪声的情形。还需要指出, 用这一方法时, 自适应的过程将在有限步停止, 因此这一思想一般来说不能用于时变的不确定系统。算法9.1.1也有其它缺点, 比如在实际中算法的性能可能较差而且参数 $W$ 需要根据噪声的上界和状态初值来确定, 另外实际中对控制信号的约束也会在一定程度上进一步限制算法9.1.1的应用。

#### 注9.1.2.

我们也可以基于“否定不可行控制器”的思想设计出其它一些算法, 关键是设计好用于“否定不可行控制器”的条件。算法9.1.1要求事先已知噪声的上界, 通过类似的思想可设计更复杂的条件来去掉这一限制, 但噪声必须有界这一限制仍不能去掉。“否定不可行控制器”的思想最近广泛用于“有监督的切换控制”(参考[7, 82])。不过, 由于基于这种思想的算法有以上提到的那些缺点, 它实际上在有限步后不是自适应的且不能对付无界噪声, 因此本章中我们不把这种算法作为重点, 前两章中已给出了两种算法, 后面还将给出其它算法, 这些算法通常

都能对付有界及无界噪声且能克服算法9.1.1的一些缺点,不过相应的稳定性分析通常也比基于“否定不可行控制器”的算法困难的多。

一个应用——具有未知参数的线性系统通过数据通讯信道的自适应镇定问题虽然“否定不可行控制器”的思想非常简单,但由于它具有易于理论分析且需要条件较少的优越性,我们可以用它来解决一些其它方法难以奏效的理论问题。比如,控制理论上已有的成果多是针对受控对象与控制器在一起的情形,即控制器可以直接根据观测到的状态或输出设计反馈来作用于受控对象,那么当受控对象与控制器分离时,特别是受控对象与控制器之间需要通过一个有干扰通讯信道来传输状态或反馈信息时,由于通讯信道中也同时存在不确定性,这时我们可以问:镇定系统的控制器是否存在?如何设计有效的控制器?上述问题的答案并非易见的,显然它还受制于通讯信道的信息传输率限制。最简单的情形自然是受控对象具有线性系统的结构,即

$$X_{t+1} = AX_t + BU_t + W_{t+1},$$

这里 $X_t$ 为受控对象的状态, $U_t$ 为(通过信道传输过来的)控制信号, $W_t$ 为有界噪声干扰。为简单起见,假定 $U_t$ 能直接传输给受控对象,但受控对象的状态通过数字信道传输给控制器端,因此必须进行量化。当系数阵 $A, B$ 已知时,对前述问题已有一些研究[26, 31, 102, 111],得益于已知的 $A, B$ ,我们能够通过控制器端接受到的信息来对 $X_t$ 的上下界进行估计,从而可不断细化量化范围来逐步削减通讯信道中的不确定性带来的影响。那么, $(A, B) \in \Omega$ 未知时( $\Omega$ 为一个紧集),已有的结果是否成立?由于 $A, B$ 未知,状态 $X_t$ 的范围很难有效估计,这给控制器的设计带来很大困难。但换个角度,这一问题可归结为有限模型自适应控制问题:对某一固定的 $(A_0, B_0)$ ,根据前人的工作可以设计控制器及相应的编码器、解码器;进一步可验证:该控制器有一定(小范围)的鲁棒性,即 $(A, B)$ 在 $(A_0, B_0)$ 附近时该控制器仍是有效的。因此,可以把 $\Omega$ 划分成许多小区域(每个小区域的中心代表一个对应的模型)

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^M \Omega_i,$$

对每个小区域 $\Omega_i$ 内的 $(A, B)$ ,可以设计一个相应的控制器 $C^{(i)}$ ,如果真实系统的 $(A, B)$ 就在小区域 $\Omega_i$ 内时,就可以用控制器 $C^{(i)}$ 来有效估计 $X_t$ 的范围。然后基于“否定不可行控制器”的思想,我们可以逐个试验各备选控制器,如果某备选

控制器不可行, 必然会造成 $X_t$ 发散, 从而超出该备选控制器所给出的上下界估计, 通过引入“溢出”标志, 就可以设计“否定不可行控制器”的条件。剩下的问题是切换到下一个备选控制器时, 如何重新保证状态 $X_t$ 落入新控制器对 $X_t$ 估计的范围, 这一问题也不难解决, 我们只需按一定速度不断增大对 $X_t$ 估计的范围, 就可保证这一点。这样基于本小节的思想, 就可以从理论上解决上面提出的问题(但仿真表明该方法根本不实用, 因为它通常造成 $X_t$ 及 $U_t$ 非常大的幅度)。由于篇幅关系, 作者参与的这一工作将不在本文中详细论述, 举此例子仅用于介绍本小节思想的一个应用。

### 9.1.2 基于权重向量自动调整的方法

这种方法通过以一定权重比例来组合各已知控制器从而构造控制信号, 权重向量会根据后验的信息进行逐步调整。由于我们不知道哪一模型可以描述真实系统, 所以在算法开始时我们对所有模型都使用同样的权重; 然后在每一时刻计算每个模型造成的误差, 对误差很大的模型希望逐渐降低其权重比例, 而误差较小的模型希望逐渐增大其权重比例(调整时仍保持所有权重之和为1)。采用这一思想, 已知 $M$ 个模型的权重可以灵活调整以能自适应的反映每个已知模型的适应性。由于权重的调整是渐变的, 因此偶尔很大的噪声跳变不会对权重造成很大影响, 所以直观上这种方法能够对付有界和无界噪声, 且能够在一定程度上适应真实系统不断变化的结构, 这一点已经从仿真中得到了验证。

以下算法是根据上述思想设计的:

#### 算法9.1.2.

选取以下控制器

$$u_t = -\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) f_i(y_t) = -\alpha(t) \cdot F_t, \quad (9.1)$$

其中

$$F_t = (f_1(y_t), f_2(y_t), \dots, f_M(y_t))^T, \quad (9.2)$$

且

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_M(t)) \quad (9.3)$$

由下式递推给出:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{\beta(t)}{\|\beta(t)\|_1} = \beta(t) / \sum_{i=1}^M |\beta_i(t)|, \\ \beta(t) &= \alpha(t-1) \circ D(t) \triangleq (\alpha_1(t-1)D_1(t), \alpha_2(t-1)D_2(t), \dots, \alpha_M(t-1)D_M(t)), \end{aligned} \quad (9.4)$$

其初始权向量取为

$$\alpha(0) = \left(\frac{1}{M}, \frac{1}{M}, \dots, \frac{1}{M}\right). \quad (9.5)$$

在此对  $i = 1, 2, \dots, M$  取

$$D_i(t) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{1+|f_i(y_{t-1})+u_{t-1}-y_t|}, & \text{如果 } |y_t| > \bar{y}_{t-1}; \\ 1, & \text{否则} \end{cases} \quad (9.6)$$

这里  $\bar{y}_t \triangleq \max_{j \leq t} |y_j|$  可按如下递推方式计算:

$$\bar{y}_t = \max(\bar{y}_{t-1}, |y_t|), \quad \bar{y}_0 = 0. \quad (9.7)$$

### 注9.1.3.

这一算法并没有试图直接辨识真实系统。但在算法中我们引入权向量  $\alpha(t)$ ，通过自适应地调整权向量，使得算法能间接辨识出系统并达到控制目的。在算法中不需要可调参数，也避免了控制信号和输出信号的剧变。其思想很容易理解，但是稳定性分析有很大的困难，这不仅是因为对这种新颖的递推算法还没有有效而系统的分析方法，还因为其闭环系统是一复杂、时变的迭代非线性动力系统，它不属于切换系统，但具有一般混杂系统的特点，文献中还未见到对类似系统的讨论。在本章中我们只研究该算法的BIBO稳定性。

### 注9.1.4.

这里给出的  $D_i(t)$  的定义主要出于两个原因：(a) 如果条件  $|y_t| > \bar{y}_{t-1}$  不成立，则不必修改权向量  $\alpha(t)$ ，所以这一条件可以减少很多计算；(b) 这一修改权重的方案可以很大程度的减少分析闭环系统稳定性的困难。其它定义  $D_i(t)$  的方法在实际中也可采用。例如我们可以简单取

$$D_i(t) \triangleq \frac{1}{1+|f_i(y_{t-1})+u_{t-1}-y_t|}; \quad (9.8)$$

但是这一方案给分析闭环系统带来很大困难。仿真表明这一方法在稳健性和瞬态效果方面虽然不比其它方法差，但它需要较多的计算量。

### 9.1.3 基于伪参数向量估计的方法

对问题I，假设真实系统为模型  $K$ ，即  $f(\cdot) \equiv f_K(\cdot)$ 。采用回归模型思想，我们可以重新把系统(6.5)写为

$$y_{t+1} = \vartheta^T F_t + u_t + w_{t+1}, \quad (9.9)$$

其中

$$\vartheta = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\tau,$$

$$F_t = (f_1(y_t), \dots, f_K(y_t), \dots, f_M(y_t))^\tau.$$

由于 $K$ 未知, 所以我们只需把 $\vartheta$  视为模型(9.9)的未知参数向量, 这样可以用一些递推辨识算法来估计此未知参数向量(在后面我们称之为伪参数向量)。在传统的辨识算法中, 伪参数向量 $\vartheta$ 的估计值 $\hat{\vartheta}_t$  通常不再具有各分量之和为常数1的性质, 这是区别于算法9.1.2中权向量的一个地方。

为演示这一思想, 我们采用以下算法来估计伪参数向量 $\vartheta$ , 其随机稳定性将在后面部分研究:

### 算法9.1.3.

定义

$$D = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_M)^\tau \in \mathcal{R}^M : 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq M\}. \quad (9.10)$$

当 $t = 0, 1, 2, \dots$ 时, 取控制律为:

$$u_t = -\hat{\vartheta}_t^\tau F_t, \quad (9.11)$$

且修正估计值 $\hat{\vartheta}_t$ 如下

$$\hat{\vartheta}_{t+1} = \pi_D \left\{ \hat{\vartheta}_t + \frac{y_{t+1}}{d + \|F_t\|^2} F_t \right\} \quad (9.12)$$

其中 $d > 0$ 足够大, 且 $\pi_D\{x\} \triangleq \arg \min_{x' \in D} \|x - x'\|$ .

### 注9.1.5.

算法9.1.3为模化投影最小均方算法(NPLMS)的具体应用(参考[40, 41]), 后者作为一种稳健自适应控制算法, 可以用来对付包括慢时变参数、随机噪声和未建模动态这些不确定性, 这种算法比前面提到的算法需要更多的计算量, 且在实际中其参数并不易确定。原NPLMS算法是针对线性系统提出的, 这里在算法9.1.3中允许函数 $f_k(\cdot)$ 是非线性的, 但函数 $f_k(\cdot)$ 线性增长的假设仍是必要的。

## 9.2 主要结果

在本节中, 将针对前面提出的各种算法, 给出它们的闭环稳定性; 并将基于这些结果, 对本部分提出的中心问题(问题I与II)给出还不够完整的回答。

为方便起见, 集合  $\mathcal{F}_0 = \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$  可被看作是模型集。当我们说  $f \in \mathcal{F}_0$  时, 意思是指真实系统可在模型集中取得, 即对某个确定的(但未知)的整数  $1 \leq K \leq M$  有  $f \equiv f_K$  成立。

### 9.2.1 对本部分中心问题的回答

既然外部噪声干扰能影响系统的行为, 则显然对问题I和II的回答依赖于对噪声序列所加的条件。

#### 9.2.1.1 无噪声情形

我们首先考虑最简单的情形—确定性系统, 也就是没有噪声(及未建模动态)的情形。在这种情形下, 直观上我们可以通过解方程来正确辨识出真实系统, 但这一事实的证明并非显然。基于下一节中给出的算法9.3.1, 我们可以证明

**命题 9.1.** 对系统(6.5), 如果  $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ , 且没有噪声 ( $w_t = 0$ ), 则经过有限步(不超过  $M$  步)后就可以正确的辨识出真实系统。

因此由算法9.3.1构造的控制律可使系统经过有限步后稳定在原点处。

#### 9.2.1.2 有界噪声情形

对有界噪声情形, 我们期望能构造出使得闭环系统的输出序列有界的控制器, 即BIBO稳定的控制器。事实上这是可以做到的:

**命题 9.2.** 对系统(6.5), 假设噪声序列  $\{w_t\}$  有界, 且存在一个模型  $f_K \in \mathcal{F}_0$  使得  $\tilde{\rho}(f, f_K) < 1$ , 则存在一个反馈控制器使得闭环系统的输出序列  $\{y_t\}$  有界。

以上命题是本章中定理9.4的一个推论。值得注意的是, 在此不需要对  $\mathcal{F}_0$  附加任何额外的假设条件。事实上这一结果的得到, 恰恰得益于前文所述算法9.1.1的本质缺点。这是很有趣的现象: 在有界噪声和时不变系统的情形, 最简单的算法能在理论上给出最简洁漂亮的结果, 不需加任何额外的条件; 但其它能对付无界噪声及时变系统的算法(如拟WLS型算法), 为保证同样的BIBO稳定性, 却可能需要加一些额外的条件。这提示我们在实际应用中要辩证地看待各种算法的优缺点, 根据具体情况进行选择。

前一章中在一定条件下给出了拟WLS型算法的BIBO稳定性, 本章还将在一定条件下给出算法9.1.2的BIBO稳定性。



### 9.2.1.3 无界噪声情形

对无界噪声（比如高斯噪声）情形，我们不能期望闭环系统的输出序列有界，而希望闭环系统在某种时间平均意义下或空间平均意义下稳定。大量仿真表明：本章中列出的大多数算法(除去算法9.1.1) 以及前两章中的拟LS型算法、拟WLS型算法，都可用来对付无界噪声。然而由于无界噪声情形分析上的困难，所以目前还不能给出类似有界噪声情形的完美结果。

总结对拟LS型算法分析的结果和本章后面对算法9.1.3分析的结果，我们可得

**命题 9.3.** 对系统(6.5)，假设函数 $f(x)$ 及 $f_i(x)$ 具有线性增长速率，且存在模型 $f_K \in \mathcal{F}_0$ 使得 $\tilde{\rho}(f, f_K) < \epsilon$ 成立，其中 $\epsilon$ 为一适当小的正数。

- 若噪声序列在 $p$ -平均意义下有界，则存在控制器使得闭环系统的输出序列 $\{y_t\}$ 在 $p$ -平均意义下有界，即闭环系统有 $p$ -平均稳定性。
- 若噪声序列具有很好的统计性质（“有界能稳”），则存在控制器使得闭环系统的输出序列 $\{y_t\}$ 的方差有界，即闭环系统有随机均方稳定性。

值得注意的是，命题9.3的两个结果都要求线性增长条件，而且对拟LS型算法来说已通过反例说明这一条件通常不能减弱。然而这并不意味着这一条件对其它能对付无界噪声的算法一定是必不可少的，因此在不对 $\mathcal{F}$ 附加任何假设条件时，我们仍不知道镇定系统的反馈控制律是否总存在。从仿真结果来看，其它一些算法（如拟WLS型算法）在无界噪声情形也有很好的稳定性，但这方面理论上仍需做进一步的探索。所以在无界噪声情形下，有限模型自适应控制问题还没有得到完全的解决，我们在此也只是给出了部分回答。

### 9.2.2 算法9.1.1的BIBO稳定性

**定理 9.4.** 对系统(6.5)，假设存在模型 $f_K \in \mathcal{F}_0$ 使得 $\tilde{\rho}(f, f_K) < 1$ ，则在算法9.1.1下，取常数 $W$ 足够大时，闭环系统BIBO稳定。

**推论 9.5.** 对系统(6.5)，假设 $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ 成立。则在算法9.1.1下，取常数 $W$ 足够大时，闭环系统BIBO稳定。

### 9.2.3 算法9.1.2的BIBO稳定性

以下假设被用来分析算法9.1.2：

**A2.** 对任意的  $1 \leq i \leq M$ , 要么 (a)  $\limsup_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|f_i(x) - f(x)|}{|x|} < 1$  成立; 要么 (b)  $\liminf_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|f_i(x) - f(x)|}{|x|} \geq 1$  成立。

**定理 9.6.** 对系统 (6.5), 假设存在模型  $f_K \in \mathcal{F}_0$  使得  $\tilde{\rho}(f, f_K) < 1$  成立, 且包括假设 A2 在内的一些条件 (见证明) 成立, 则在算法 9.1.2 下, 闭环系统 BIBO 稳定。

**推论 9.7.** 对系统 (6.5), 假设  $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ , 并设定理 9.6 中同样的条件也成立, 则在算法 9.1.1 下, 闭环系统 BIBO 稳定。

### 注 9.2.1.

在定理 9.6 中需要的条件允许函数  $f_i(x)$  具有非线性增长率。更多讨论请参看定理 9.6 的证明和其后的注释。

## 9.2.4 算法 9.1.3 的随机均方稳定性

为给出算法 9.1.3 的随机稳定性, 我们需要以下关于  $\mathcal{F}_0$  和噪声序列  $\{w_t\}$  的假设:

**AL.** 对任意的  $1 \leq i \leq M$ , 存在某个常数  $A \geq 0$  与  $A' \geq 0$ , 使得

$$|f_i(x) - f(x)| \leq A|x| + A', \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad (9.13)$$

(注: 在此我们对  $A$  和  $A'$  的值不加任何其它限制。)

**AB.** 存在  $\epsilon_0 > 0$  使得  $\{\epsilon_0 w_t^2\} \in \mathcal{B}_1^\infty$  成立, 即对任意的  $n > m \geq 0$

$$E \exp\left\{\sum_{j=m+1}^n |\epsilon_0 w_j^2|\right\} \leq \exp\{a(n-m) + b\} \quad (9.14)$$

其中  $a$  与  $b$  为两个非负常数。

### 注 9.2.2.

假设 AL 即线性增长条件。假设 AB 表明噪声序列  $\{w_t\}$  在某种平均意义下有界 (在文献 [41] 中称为“有界能稳”), 这一条件允许噪声序列是无界的, 但是不易验证而且相对较强, 因为它至少要求  $w_t$  的任意阶矩都是有穷的。

**定理 9.8.** 对系统 (6.5), 假设 AL 成立, 且存在模型  $f_K \in \mathcal{F}_0$  使得  $\tilde{\rho}(f, f_K) < \epsilon$  成立, 其中常数  $\epsilon > 0$  足够小。则对于算法 9.1.3, 在假设 AB 下, 当  $\epsilon_0 d$  充分大且  $\epsilon_0$  充分小时, 闭环系统具有以下意义的随机均方稳定性:

$$\sup_t E y_t^2 = O(d) < \infty. \quad (9.15)$$

而且, 如果  $Ew_t^2 \leq \sigma^2$ , 则

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E|y_t| = O(\sigma) + O(\sqrt{\varepsilon d}). \quad (9.16)$$

**推论 9.9.** 对系统(6.5), 假设AL和AB成立且  $f \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ 。则对算法9.1.3, 定理9.8的结果成立。

## 9.3 定理的证明

### 9.3.1 命题9.1的证明

**算法9.3.1.**

定义集合

$$D_{i,j} = \{x \in \mathcal{R} : f_i(x) \neq f_j(x)\} \quad (9.17)$$

显然对任意的  $i \neq j$ ,  $D_{i,j}$  非空。取  $u_0 = 0$ ,  $i_0 = 1$ , 则对  $t = 1, 2, \dots, M$  定义  $i_t, u_t$  如下:

- (1) 如果  $y_t - u_{t-1} - f_{i_{t-1}}(y_{t-1}) = 0$ , 则取  $i_t = i_{t-1}$ ; 否则取  $i_t = t + 1$ 。
- (2) 当  $t < M$  时, 取任意的  $v_t \in D_{i_{t-1}, t+1}$ , 则可定义  $u_t = v_t - f_{i_t}(y_t)$ 。且当  $t \geq M$  时, 我们仅需定义  $u_t = -f_{i_M}(y_t)$ 。

**注9.3.1.**

这一算法可以保证真实系统仅通过  $M$  步就可正确辨识出来。在无噪声情形, 直观上我们能够通过解方程来决定哪个模型为真实系统, 所以不必设计特殊的控制律  $u_t$ 。然而, 由于在较大范围内的  $x$  都可能  $f_i(x) = f_j(x)$ , 如果我们不用特殊方法来设计  $u_t$  (比如随机选择  $u_t$ ), 则不能保证可以通过解方程把真实系统辨识出来。

**命题9.1的证明:** 由  $w_t = 0$ , 可得  $y_t - u_{t-1} = f(y_{t-1}), \forall t > 0$ 。现在我们考虑以下情形:

- (1) 如果  $i_M = 1$ , 则由  $i_t$  的定义, 可得

$$i_0 = i_1 = \dots = i_{M-1} = i_M = 1, \quad (9.18)$$

且

$$f(y_{t-1}) = f_1(y_{t-1}), t = 1, 2, \dots, M-1. \quad (9.19)$$

从而对  $t = 1, 2, \dots, M - 1$ ,

$$v_t = u_t + f_{i_t}(y_t) = u_t + f(y_t) = y_{t+1}. \quad (9.20)$$

注意到

$$y_{t+1} = v_t \in D_{i_{t-1}, t+1} = D_{1, t+1}, \quad (9.21)$$

从而可得

$$f_{t+1}(y_{t+1}) \neq f(y_{t+1}), \quad (9.22)$$

这表明对任意的  $k \neq 1$ , 对所有的  $t = 2, 3, \dots, M$ , 等式  $f(y_t) = f_k(y_t)$  不成立。因此真实系统一定是模型1, 即  $f(x) \equiv f_1(x)$ 。所以在这种情形下算法可以正确辨识真实系统。

(2) 如果  $i_M = k > 1$ , 则由  $i_t$  的定义必有

$$i_{k-1} = i_k = \dots = i_{M-1} = i_M = k, \quad (9.23)$$

且

$$f(y_{t-1}) = f_k(y_{t-1}), t = 1, 2, \dots, k - 1. \quad (9.24)$$

采用与情形(1)类似的方法, 对  $t = k, k + 1, \dots, M - 1$  可得

$$v_t = u_t + f_{i_t}(y_t) = u_t + f(y_t) = y_{t+1} \in D_{k, t+1}. \quad (9.25)$$

从而

$$f_{t+1}(y_{t+1}) \neq f(y_{t+1}), \quad (9.26)$$

这表明对任意  $k' > k$ , 模型  $f_{k'}$  不能为真实系统。

另一方面, 我们考虑  $t < k$ , 即  $t = 1, 2, \dots, k - 1$  时, 并且我们仅需考虑使得  $i_{t-1} \neq i_t$  成立的那些  $t$ 。

由于  $i_{t-1} \neq i_t$ , 则由  $i_t$  的定义, 必有  $i_t = t + 1$  且

$$f(y_{t-1}) = y_t - u_{t-1} \neq f_{i_{t-1}}(y_{t-1}). \quad (9.27)$$

因此对  $k' = i_{t-1}$ , 模型  $f_{k'}$  不可能是真实系统。进一步注意到对  $k' < t$ , 可得

$$i_{k'-1} = \dots = i_{t-1} = k', \quad (9.28)$$

从而对  $j = k', k' + 1, \dots, t$ ,

$$f(y_{j-1}) = y_j - u_{j-1} = f_{i_{j-1}}(y_{j-1}) = f_{k'}(y_{j-1}). \quad (9.29)$$

因此对  $j = k', \dots, t-1$ , 有

$$v_j = u_j + f_{i_j}(y_j) = u_j + f(y_j) = y_{j+1} \in D_{i_{j-1}, j+1} = D_{k', j+1}. \quad (9.30)$$

且对  $j = k', \dots, t-2$ , 有

$$f_{j+1}(y_{j+1}) \neq f_{k'}(y_{j+1}) = f(y_{j+1}), \quad (9.31)$$

这表明对  $j = k' + 1, \dots, t-1$ , 模型  $f_j$  不可能为真实系统。

对所有满足  $i_{t-1} \neq i_t$  且  $t < k$  的  $t$  重复以上论证, 则立即可得: 对任意  $j < k$ , 模型  $f_j$  不可能为真实系统。由以上两方面的论证, 可知模型  $f_k$  必为真实系统。

总之, 算法9.3.1仅通过  $M$  步就可正确辨识出真实系统, 因此命题9.1 成立。

□

### 9.3.2 定理9.4的证明

**证明:** 由于  $r \triangleq \tilde{\rho}(f, f_K) < 1$ , 则可得

$$|f(x) - f_K(x)| \leq r|x| + o(|x|). \quad (9.32)$$

因此对任意固定的  $r' \in (r, 1)$ , 存在常数  $Y > 0$  使得对任意的  $|x| > Y$ , 有  $|f(x) - f_K(x)| \leq r'|x|$  成立。

令  $C_Y = \sup_{|x| \leq Y} |f(x) - f_K(x)|$ ; 且假设  $C_w \triangleq \sup_t |w_t| < \infty$ , 并取  $W = \max(C_Y + C_w, \frac{C_w}{1-r'})$ 。

**第1步:** 首先我们来证明, 如果对某个整数  $T$  有  $i_T = K$ , 则对任意  $t \geq T$  有  $i_t = K$ 。下面采用数学归纳法来证明。

假设  $i_{t-1} = K$ , 则有

$$|y_t| = |f(y_{t-1}) - f_K(y_{t-1}) + w_t| \leq |f(y_{t-1}) - f_K(y_{t-1})| + |w_t| \leq \max(r'|y_{t-1}|, C_Y) + C_w. \quad (9.33)$$

如果  $|y_{t-1}| \leq \frac{C_w}{1-r'}$ , 则

$$|y_t| \leq \max(r'|y_{t-1}|, C_Y) + C_w \leq \max(\frac{C_w r'}{1-r'} + C_w, C_Y + C_w) = \max(\frac{C_w}{1-r'}, C_Y + C_w) = W; \quad (9.34)$$

否则

$$|y_t| \leq \max(r'|y_{t-1}|, C_Y) + C_w \leq \max(|y_{t-1}|, C_Y + C_w) \leq \max(|y_{t-1}|, W). \quad (9.35)$$

在两种情形下, 都有  $|y_t| \leq \max(|y_{t-1}|, W)$ , 则由算法9.1.1,  $i_t = i_{t-1} = K$  且  $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_{t-1}$  成立。

**第2步:** 接下来我们将证明切换仅发生有限次(不超过  $M$ ), 且存在  $i^* \in \bar{M}$  和整数  $T$ , 使得对任意的  $t \geq T$  有  $i_t = i^*$ 。事实上由算法9.1.1, 当切换发生时显然有  $|\mathcal{P}_t| = |\mathcal{P}_{t-1}| + 1$ ; 且  $\mathcal{P}_t \subseteq \bar{M}$ , 从而有  $|\mathcal{P}_t| \leq M$ , 因此仅有有限次切换发生。下面我们只需证明在某个时刻  $t$  需要切换时,  $\bar{M} \setminus \mathcal{P}_t$  一定非空。事实上由第1步, 如果  $i_{t-1} \neq K$ , 则对所有的  $k \leq t$  必有  $i_{t-k} \neq K$ , 因此  $K \notin \mathcal{P}_{t-1}$ , 从而可得  $K \notin \mathcal{P}_t \cup \{i_{t-1}\}$ , 所以集合  $\bar{M} \setminus \mathcal{P}_t$  中至少含有一个元素( $K$ )。

**第3步:** 由第2步, 对某个  $T \geq 0$ 、整数  $i^*$  和任意  $t \geq T$ , 有  $i_t = i^*$  成立。且由  $i_t$  的定义, 对所有的  $t > T$ , 可得  $|y_t| \leq \max(|y_{t-1}|, W)$ , 因此对所有的  $t$ , 有  $|y_t| \leq \max(|y_0|, |y_1|, \dots, |y_T|, W)$ 。证毕。  $\square$

### 9.3.3 定理9.6的证明

**证明:** 为方便起见, 仍把  $\{1, 2, \dots, M\}$  记作  $\bar{M}$ , 并采用记号  $|X|$  代表集合  $X$  的基数。

**第1步:** 令

$$\tilde{f}_i(x) = f(x) - f_i(x), \quad (9.36)$$

则可得

$$y_{t+1} = f(y_t) + u_t + w_{t+1} = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) [f(y_t) - f_i(y_t) + w_{t+1}] = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) [\tilde{f}_i(y_t) + w_{t+1}]. \quad (9.37)$$

由算法9.1.2, 对任意的  $i, j \in \bar{M}$ , 可得

$$\frac{\alpha_i(t)}{\alpha_j(t)} = \frac{\beta_i(t)}{\beta_j(t)} = \frac{D_i(t)}{D_j(t)} \cdot \frac{\alpha_i(t-1)}{\alpha_j(t-1)} = \frac{D_i(t)D_i(t-1)}{D_j(t)D_j(t-1)} \cdot \frac{\alpha_i(t-2)}{\alpha_j(t-2)} = \dots = \frac{\prod_{s=1}^t D_i(s)}{\prod_{s=1}^t D_j(s)} = \frac{Q_i(t)}{Q_j(t)}, \quad (9.38)$$

其中

$$Q_i(t) \triangleq \prod_{s=1}^t D_i(s). \quad (9.39)$$

注意到  $\sum_{j=1}^M \alpha_j(t) = 1$ , 则有

$$\alpha_i(t) = \frac{\alpha_i(t)}{\sum_{j=1}^M \alpha_j(t)} = \frac{Q_i(t)}{\sum_{j=1}^M Q_j(t)}. \quad (9.40)$$

定义

$$S_t \triangleq \{1 \leq s \leq t : |y_s| > |\bar{y}_{s-1}|\}, \quad (9.41)$$

由(9.6)和(6.5)可知对  $s \in S_t$  有

$$D_i(s) = \frac{1}{1+|f_i(y_{s-1})+u_{s-1}-y_s|} = \frac{1}{1+|f_i(y_{s-1})-f(y_{s-1})-w_s|}; \quad (9.42)$$

否则,  $D_i(s) = 1$ 。令

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \tilde{f}_i(y_t) + w_{t+1}, \quad \eta_i(t) = \alpha_i(t)\xi_i(t), \\ \bar{D}_i(s) &\triangleq \frac{1}{D_i(s)} = 1 + |\xi_i(s-1)| \quad \text{对 } s \in S_t, \end{aligned} \quad (9.43)$$

则可得

$$y_{t+1} = \sum_{i=1}^M \eta_i(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t)\xi_i(t) = \sum_{i=1}^M \xi_i(t) \frac{Q_i(t)}{\sum_{j=1}^M Q_j(t)} = \frac{\sum_{i=1}^M \xi_i(t)Q_i(t)}{\sum_{j=1}^M Q_j(t)}. \quad (9.44)$$

由  $Q_i(t)$ 、 $D_i(s)$  跟  $\bar{D}_i(s)$  的定义, 可得

$$Q_i(t) = \left[ \prod_{s \in S_t} \bar{D}_i(s) \right]^{-1} = \left[ \prod_{s \in S_t} (1 + |\xi_i(s-1)|) \right]^{-1}. \quad (9.45)$$

因此闭环系统为:

$$y_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^M \xi_i(t)Q_i(t)}{\sum_{j=1}^M Q_j(t)} = \frac{\sum_{i=1}^M \xi_i(t) \left[ \prod_{s \in S_t} (1 + |\xi_i(s-1)|) \right]^{-1}}{\sum_{j=1}^M \left[ \prod_{s \in S_t} (1 + |\xi_j(s-1)|) \right]^{-1}} = \frac{\sum_{i=1}^M (\tilde{f}_i(y_t) + w_{t+1}) \left[ \prod_{s \in S_t} (1 + |\tilde{f}_i(y_{s-1}) + w_s|) \right]^{-1}}{\sum_{j=1}^M \left[ \prod_{s \in S_t} (1 + |\tilde{f}_j(y_{s-1}) + w_s|) \right]^{-1}}, \quad (9.46)$$

这是一个相当复杂的递推等式。

**第2步:** 下面采用反证法。假设  $\{y_t\}$  无界, 且  $C_w \triangleq \sup_t |w_t| < \infty$ 。定义

$$\begin{aligned} I &= \{1 \leq k \leq M : \limsup_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - f_k(x)|}{|x|} < 1\}, \\ I' &= \{1 \leq k \leq M : \liminf_{0 < |x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x) - f_k(x)|}{|x|} \geq 1\} \end{aligned} \quad (9.47)$$

由假设A2, 可得  $I \cup I' = \{1, 2, \dots, M\}$ 。

由于  $\tilde{\rho}(f, f_K) < 1$ , 所以  $K \in I$ 。且由集合  $I$  的定义知

$$r \triangleq \max_{k \in I} \tilde{\rho}(f, f_k) < 1, \quad (9.48)$$

从而对任意  $k \in I$ ,

$$|\tilde{f}_k(x)| = |f(x) - f_k(x)| \leq r|x| + o(|x|). \quad (9.49)$$

取任意固定的  $\epsilon \in (r, 1)$ , 则对任意  $k \in I$ , 存在常数  $Y_k > 0$  使得对任意  $|x| > Y_k$ , 有  $|\tilde{f}_k(x)| \leq \epsilon|x| - (1 + C_w)$  成立。

同时根据集合  $I'$  的定义, 对任意  $k \in I'$ , 存在常数  $Y'_k > 0$  使得对任意  $|x| > Y'_k$ , 有  $|\tilde{f}_k(x)| \geq |x| + C_w$  成立。

取  $Y = \max(\max_{k \in I} Y_k, \max_{k \in I'} Y'_k)$ 。并令  $C_Y = C_w + \max_{k \in I} \sup_{|x| \leq Y} |\tilde{f}_k(x)|$ , 且定义

$$J_t \triangleq \{1 \leq j \leq t : |y_{j-1}| > Y\} \cap S_t, J'_t \triangleq \{1 \leq j \leq t : |y_{j-1}| \leq Y\} \cap S_t \quad (9.50)$$

则由(9.44)可得

$$y_{t+1} = \frac{\sum_{i=1}^M \xi_i(t) Q_i(t)}{\sum_{j=1}^M Q_j(t)} = \frac{\sum_{i \in I} \xi_i(t) Q_i(t)}{\sum_{j \in I} Q_j(t)} \times \frac{1 + \frac{\sum_{i \in I'} \xi_i(t) Q_i(t)}{\sum_{j \in I} \xi_j(t) Q_j(t)}}{1 + \frac{\sum_{i \in I'} Q_i(t)}{\sum_{j \in I} Q_j(t)}}. \quad (9.51)$$

第3步: 现在我们考虑

$$V(t) \triangleq \frac{\sum_{i \in I'} Q_i(t)}{\sum_{j \in I} Q_j(t)}. \quad (9.52)$$

显然

$$V(t) = \sum_{i \in I'} \frac{Q_i(t)}{\sum_{j \in I} Q_j(t)} = \sum_{i \in I'} \frac{1}{\sum_{j \in I} \frac{Q_j(t)}{Q_i(t)}} = \sum_{i \in I'} \frac{1}{\sum_{j \in I} V_{ij}(t)}, \quad (9.53)$$

其中

$$V_{ij}(t) \triangleq \frac{Q_j(t)}{Q_i(t)} = \prod_{s \in S_t} \frac{1 + |\xi_i(s-1)|}{1 + |\xi_j(s-1)|}. \quad (9.54)$$

对  $i \in I', j \in I$ , 如果  $s \in J_t$  成立, 则

$$1 + |\xi_i(s-1)| \geq |y_{s-1}| = \frac{1}{\epsilon}(\epsilon|y_{s-1}|) \geq \frac{1}{\epsilon}(1 + |\xi_j(s-1)|); \quad (9.55)$$

否则

$$\frac{1 + |\xi_i(s-1)|}{1 + |\xi_j(s-1)|} \geq \frac{1}{C_Y}, \quad (9.56)$$

其中  $C_Y$  按以上定义。从而

$$V_{ij}(t) = \prod_{s \in J_t} \frac{1 + |\xi_i(s-1)|}{1 + |\xi_j(s-1)|} \times \prod_{s \in J'_t} \frac{1 + |\xi_i(s-1)|}{1 + |\xi_j(s-1)|} \geq \frac{1}{\epsilon^{|J_t|} C_Y^{|J'_t|}}. \quad (9.57)$$



因此有

$$V(t) = \sum_{i \in I'} \frac{1}{\sum_{j \in I} V_{ij}(t)} \leq \frac{|I'|}{|I|} \epsilon^{|J_t|} C_Y^{|J_t'|}. \quad (9.58)$$

第4步: 对

$$V'(t) \triangleq \frac{\sum_{i \in I'} \xi_i(t) Q_i(t)}{\sum_{j \in I} \xi_j(t) Q_j(t)}, \quad (9.59)$$

类似于第三步, 可得

$$V'(t) = \sum_{i \in I'} \frac{1}{\sum_{j \in I} V_{ij}(t) \frac{\xi_j(t)}{\xi_i(t)}} \leq \frac{\sum_{i \in I'} \xi_i(t)}{\sum_{j \in I} \xi_j(t)} \epsilon^{|J_t|} C_Y^{|J_t'|}. \quad (9.60)$$

第5步: 假设  $S_t = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ ,  $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$ , 则由  $S_t$  定义以及我们假设的  $\{y_t\}$  无界可知, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 序列  $\{|y_{s_n}|\}$  严格递增并趋于无穷。

因此由  $S_t, J_t$  与  $J_t'$  的定义可知,  $J_t'$  仅包含有限个元素; 且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $|J_t| \rightarrow \infty$ . 所以很显然我们可以得到当  $t \rightarrow \infty$  时  $V(t) \rightarrow 0$ .

进一步, 如果

$$\frac{\sum_{i \in I'} \xi_i(t)}{\sum_{j \in I} \xi_j(t)} = o\left(\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^t\right), \quad (9.61)$$

则也可得到当  $t \rightarrow \infty$  时  $V'(t) \rightarrow 0$ . 设  $r \triangleq \max_{k \in I} \tilde{\rho}(f, f_r)$ , 由于  $\epsilon$  可取区间  $(r, 1)$  内的任意数, 则条件(9.61)中的常数  $\epsilon$  可由  $r$  代替。

在证明完成后我们将在后面的注9.3.2中讨论条件(9.61)何时成立。

第6步: 由于当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $V(t) = o(1)$  和  $V'(t) = o(1)$  成立, 联合(9.51)可得

$$|y_{t+1}| \leq \frac{\sum_{i \in I} |\xi_i(t)| Q_i(t)}{\sum_{j \in I} Q_j(t)} \times \frac{1+V'(t)}{1+V(t)} \leq \max_{i \in I} |\xi_i(t)| \times (1+o(1)) \leq (\epsilon |y_t| + C) \times (1+o(1)). \quad (9.62)$$

因此对充分大的  $t$ , 可知

$$|y_{t+1}| \leq \epsilon' |y_t| + C', \quad (9.63)$$

其中  $\epsilon' \in (\epsilon, 1)$ , 由此可以得出  $\{y_t\}$  必有界。这与假设中序列  $\{y_t\}$  无界相矛盾! 从而证得算法9.1.2的BIBO稳定性。□

### 注9.3.2.

条件(9.61)是一个非常弱的条件。首先如果  $\{f_i(x)\}$  为线性函数或具有线性增长率的函数, 则很容易证明对充分大的  $|y_t|$ , 有  $\frac{|\xi_i(t)|}{|\xi_j(t)|} = O(1)$  成立, 因此条件(9.61)为真。下面我们将指出由于  $(\frac{1}{\epsilon})^t$  以指数速率发散, 所以在条件(9.61)中也允许比线

性增长速率快的非线性增长率。不过, 在比线性增长速率快的非线性增长率情况下, 很难估计 $|y_t|$ 的阶, 从而条件(9.61)不容易验证。另外, 从证明过程中可以看出条件(9.61)仍有可能减弱。因此尽管对算法9.1.2进行完全理论分析有很大困难, 但是在实际中有着很好的稳定性。到目前为止我们仍不知道算法9.1.2是否可以对付任意非线性增长率, 尽管我们目前在仿真中还没发现任何反例。

### 注9.3.3.

前一章中用过的假设A1也可以用来分析算法9.1.2, 证明思想与上面类似, 这时需要的额外条件甚至比条件(9.61)还弱一些。为节省篇幅, 我们不再对此讨论。

### 9.3.4 定理9.8的证明

首先我们引入以下记号:

$$\tilde{\vartheta}_t \triangleq \vartheta - \hat{\vartheta}_t, m_t \triangleq \|F_t\|, \alpha_t \triangleq \frac{(F_t^T \tilde{\vartheta}_t)^2}{d+m_t^2}, \eta_t = f(y_t) - f_K(y_t). \quad (9.64)$$

显然

$$y_{t+1} = f_K(y_t) + \eta_t + u_t + w_{t+1} = \vartheta^T F_t - \hat{\vartheta}_t^T F_t + \eta_t + w_{t+1} = \tilde{\vartheta}_t^T F_t + \eta_t + w_{t+1}. \quad (9.65)$$

由 $\tilde{\rho}(f, f_K) < \varepsilon$ 可知, 对所有 $x$ , 有 $|f(x) - f_K(x)| \leq \varepsilon|x| + C_\varepsilon$ 。且注意到序列 $\{w_t + C\}$ 对任意常数 $C$ 仍满足假设AB。因此不失一般性, 下面我们假设对足够小的常数 $\varepsilon > 0$ 有

$$|\eta_t| = |f(y_t) - f_K(y_t)| \leq \varepsilon \|F_t\|. \quad (9.66)$$

**第1步:** 显然 $\vartheta \in D$ , 从而由投影的性质, 并注意到 $F_t^T F_t = m_t^2$ , 可得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\vartheta}_{t+1}\|^2 &\leq \left\| \vartheta - \left( \hat{\vartheta}_t + \frac{F_t}{d+m_t^2} y_{t+1} \right) \right\|^2 \\ &= \left\| \tilde{\vartheta}_t - \frac{F_t}{d+m_t^2} (F_t^T \tilde{\vartheta}_t + \eta_t + w_{t+1}) \right\|^2 \\ &= \left\| \left( I - \frac{F_t F_t^T}{d+m_t^2} \right) \tilde{\vartheta}_t - \frac{F_t (\eta_t + w_{t+1})}{d+m_t^2} \right\|^2 \\ &= \tilde{\vartheta}_t^T \tilde{\vartheta}_t - 2 \tilde{\vartheta}_t^T \frac{F_t F_t^T}{d+m_t^2} \tilde{\vartheta}_t + \tilde{\vartheta}_t^T \left( \frac{F_t F_t^T}{d+m_t^2} \right)^2 \tilde{\vartheta}_t \\ &\quad + \frac{F_t^T F_t (\eta_t + w_{t+1})^2}{(d+m_t^2)^2} - \frac{2 F_t^T \tilde{\vartheta}_t (\eta_t + w_{t+1})}{d+m_t^2} + 2 \tilde{\vartheta}_t^T \frac{F_t F_t^T}{d+m_t^2} \frac{F_t (\eta_t + w_{t+1})}{d+m_t^2} \\ &\leq \|\tilde{\vartheta}_t\|^2 - \frac{\tilde{\vartheta}_t^T F_t F_t^T \tilde{\vartheta}_t}{d+m_t^2} + \frac{F_t^T F_t (\eta_t + w_{t+1})^2}{(d+m_t^2)^2} + \frac{2 F_t^T \tilde{\vartheta}_t |\eta_t + w_{t+1}|}{d+m_t^2} \\ &\leq \|\tilde{\vartheta}_t\|^2 - \alpha_t + \frac{(\eta_t + w_{t+1})^2}{d+m_t^2} + \frac{1}{2} \alpha_t + \frac{2(\eta_t + w_{t+1})^2}{d+m_t^2} \\ &\leq \|\tilde{\vartheta}_t\|^2 - \frac{1}{2} \alpha_t + \frac{6(\eta_t^2 + w_{t+1}^2)}{d+m_t^2} \\ &\leq \|\tilde{\vartheta}_t\|^2 - \frac{1}{2} \alpha_t + O\left(\frac{w_{t+1}^2}{d}\right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (9.67)$$

其中最后一个不等式可由 $\eta_t \leq \epsilon \|F_t\|$ 得到, 其中“O”常数可取为6.

第2步: 由(9.67)可得,

$$\|\tilde{\vartheta}_{n+1}\|^2 - \|\tilde{\vartheta}_{m+1}\|^2 \leq -\frac{1}{2} \sum_{t=m+1}^n \alpha_t + O\left(\frac{1}{d} \sum_{t=m+1}^n w_{t+1}^2\right) + O(\epsilon^2(n-m)). \quad (9.68)$$

且注意到 $\|\tilde{\vartheta}_t\|$ 有界, 则立即可得

$$\sum_{t=m+1}^n \alpha_t \leq O\left(\frac{\epsilon_0 \sum_{t=m+1}^n w_{t+1}^2}{\epsilon_0 d}\right) + O(\epsilon^2(n-m)) + O(1). \quad (9.69)$$

第3步: 定义 $L_t = y_t^2 + w_t^2 + \eta_{t-1}^2, L_0 = 0$ , 则由AL的线性增长假设得

$$m_t^2 = \|F_t\|^2 = O(y_t^2) = O(L_t). \quad (9.70)$$

因此

$$\begin{aligned} y_{t+1}^2 &= (F_t^T \tilde{\vartheta}_t + \eta_t + w_{t+1})^2 \\ &\leq 2(F_t^T \tilde{\vartheta}_t)^2 + 2(\eta_t + w_{t+1})^2 \\ &\leq 2\alpha_t(d + m_t^2) + O(\epsilon^2 m_t^2 + w_{t+1}^2) \\ &= O((\alpha_t + \epsilon^2)L_t) + O(d\alpha_t + w_{t+1}^2), \end{aligned} \quad (9.71)$$

从而有

$$L_{t+1} = y_{t+1}^2 + w_{t+1}^2 + \eta_t^2 = O((\alpha_t + \epsilon^2)L_t) + O(d\alpha_t + w_{t+1}^2) = \beta_t L_t + \mu_t. \quad (9.72)$$

第4步: 因为 $L_0 = 0$ , 则通过反复迭代式(9.72), 可得

$$L_{t+1} = \sum_{m=0}^t \Phi(t, m) \mu_m, \quad (9.73)$$

其中

$$\Phi(t, m) \triangleq \prod_{j=m+1}^t \beta_j. \quad (9.74)$$

通过对 $x \geq 0$ 应用不等式 $x \leq \exp(x-1)$ ,

$$\Phi(t, m) \leq \exp\left\{\sum_{j=m+1}^t \beta_j - (t-m)\right\} = \exp\{-(t-m)\} \cdot \exp\left\{\sum_{j=m+1}^t \beta_j\right\}, \quad (9.75)$$

因此

$$[E\Phi^2(t, m)]^{\frac{1}{2}} = \exp\{-(t-m)\} \cdot [E \exp\{2 \sum_{j=m+1}^t \beta_j\}]^{\frac{1}{2}}, \quad (9.76)$$

联合(9.69)与 $\beta_j = O(\alpha_j + \epsilon^2)$ , 并取 $\epsilon_0 d$ 足够大, 可得

$$\begin{aligned} E \exp\left\{2 \sum_{j=m+1}^t \beta_j\right\} &\leq E \exp\left\{O\left(\frac{\epsilon_0 \sum_{j=m+1}^t w_{j+1}^2}{\epsilon_0 d}\right)\right\} \cdot \exp\{O(\epsilon^2(t-m))\} \cdot O(1) \\ &\leq [E \exp\{\epsilon_0 \sum_{j=m+1}^t w_{j+1}^2\}]^{O(\frac{1}{\epsilon_0 d})} \cdot \exp\{O(\epsilon^2(t-m))\} \cdot O(1) \\ &\leq \exp\{O(\frac{1}{\epsilon_0 d} + \epsilon^2)(t-m)\} \cdot O(1). \end{aligned} \quad (9.77)$$

类似的, 由于 $\mu_t = O(d\alpha_t + w_{t+1}^2) = O(w_{t+1}^2 + \epsilon^2) = d \cdot [O(\frac{w_{t+1}^2}{d}) + O(\epsilon^2)]$ , 可得

$$[E\mu_t^2]^{\frac{1}{2}} \leq d \cdot [O(\exp\{O(\frac{1}{\epsilon_0 d} + \epsilon^2)\})]^{\frac{1}{2}} \quad (9.78)$$

取 $\epsilon_0 d$  足够大且 $\epsilon$ 充分小, 则对某个 $\lambda \in (0, 1)$ , 有

$$\exp\{O(\frac{1}{\epsilon_0 d} + \epsilon^2)\} = \exp\{\lambda\} \quad (9.79)$$

因此由(9.76), (9.77) 和(9.78), 可得

$$\begin{aligned} E[\Phi(t, m)\mu_m] &\leq [E\Phi^2(t, m)]^{\frac{1}{2}} [E\mu_t^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \exp\{-(t-m)\} \exp\{O(\frac{1}{\epsilon_0 d} + \epsilon^2)(t-m)\} \cdot O(d) \quad (9.80) \\ &\leq \exp\{-(1-\lambda)(t-m)\} O(d). \end{aligned}$$

所以最终有

$$EL_{t+1} = \sum_{m=0}^t E[\Phi(t, m)\mu_m] \leq \sum_{m=0}^t \exp\{-(1-\lambda)(t-m)\} \cdot O(d) \leq \frac{1}{1-\exp\{-(1-\lambda)\}} \cdot O(d). \quad (9.81)$$

从而

$$\sup_t Ey_t^2 \leq \sup_t EL_t = O(d) < \infty. \quad (9.82)$$

证毕。

下面我们将证在条件 $Ew_t^2 \leq \sigma^2$ 下, (9.16)成立。事实上由(9.69),

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E\alpha_t = O(\frac{\sigma^2}{d} + \epsilon). \quad (9.83)$$

且由(9.71), 并注意 $Em_t^2 = E\|F_t\|^2 = O(Ey_t^2) = O(d)$ ,  $E\alpha_t = O(\frac{\sigma^2}{d} + \epsilon)$ , 可得

$$\begin{aligned} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E|y_t| &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E[\sqrt{\alpha_{t-1}(d + m_{t-1}^2)} + \epsilon m_{t-1} + |w_t|] \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \{\sqrt{E\alpha_{t-1}(d + m_{t-1}^2)} + \sigma + \epsilon Em_{t-1}\} \\ &\leq O(\sigma + \sqrt{\epsilon d}). \end{aligned} \quad (9.84)$$

定理证毕。 □

## 9.4 数值仿真

本节中的仿真还用前两章仿真例子1中的系统，但分别用本章介绍的三个算法。在下面的仿真中，未知参数为随机选取的一个常数。为便于比较，所有的仿真尽可能使用相同的设置。

在图9.1中，使用了基于“否定不可行控制器”的算法9.1.1，在该算法中取 $W = 10000$ ，噪声序列取自均匀分布 $U(0, 1)$ 。在这个仿真中，由于该算法的限制，我们不能取噪声序列为高斯白噪声之类的无界序列。从仿真中可以看出，虽然系统最终能够镇定，但整个过程中输出序列、控制序列造成了过大的幅度，这在实际中通常是不允许的。

在图9.2中，使用了基于“权重向量自动调整”的算法9.1.2，噪声序列取为标准高斯白噪声 $N(0, 1)$ 。在该算法中没有可调的参数。该算法的镇定效果相对较好。仿真还表明在该算法中用式(9.8)替换式(9.6)后，镇定效果还会进一步明显改善，这是因为式(9.6)对于权重向量的自适应调整过于“懒惰”，而式(9.8)在每一时刻都对权重向量作一定调整。

在图9.3中，使用了基于“伪参数向量估计”的NPLMS算法9.1.3，在该算法中取 $d = 1000$ ，噪声序列取为标准高斯白噪声 $N(0, 1)$ 。可以看出，该算法也能够把系统镇定，但效果相对较差，该算法计算量也较大，这提示我们把传统的递推辨识算法应用于有限模型自适应控制问题虽然可行但不一定很好。

## 9.5 本章小结

本章对有限模型自适应控制问题，基于不同于前两章的一些思想，提出了其它几种算法，并分析了相应闭环系统的稳定性。这些结果与前两章的结果合在一起，可以对本部分的中心问题给出部分回答。这些结果表明：在合理的较弱条件下，存在反馈控制器能对付系统（本质上）有限的内部不确定性，从而有助于我们对整个反馈机制的能力有更进一步的理解。

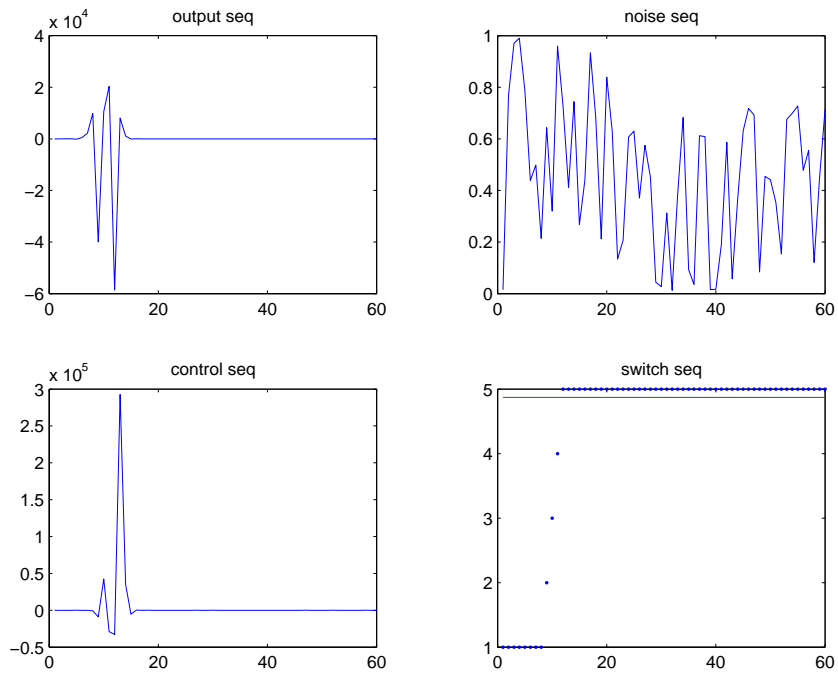


图 9.1: 算法9.1.1的仿真

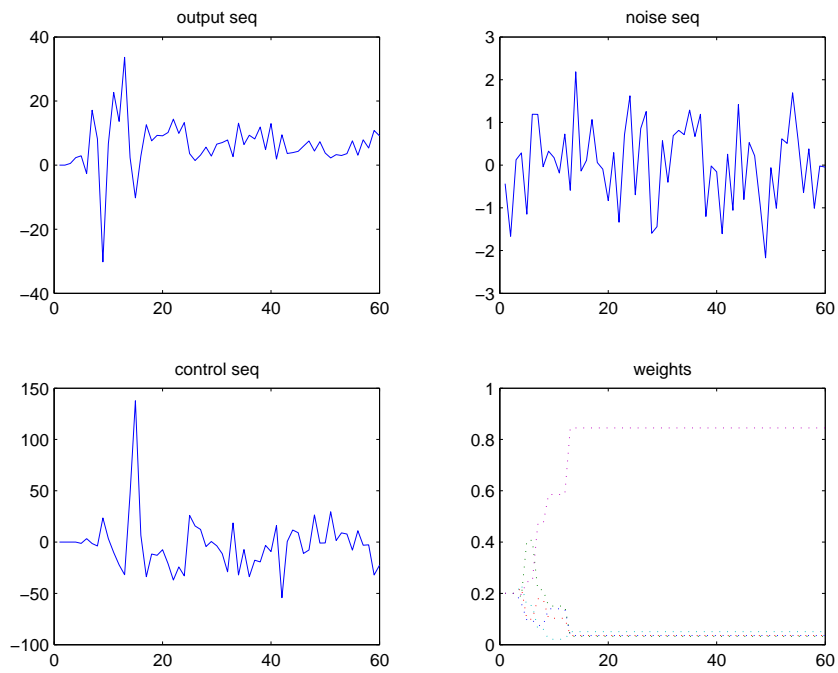


图 9.2: 算法9.1.2的仿真

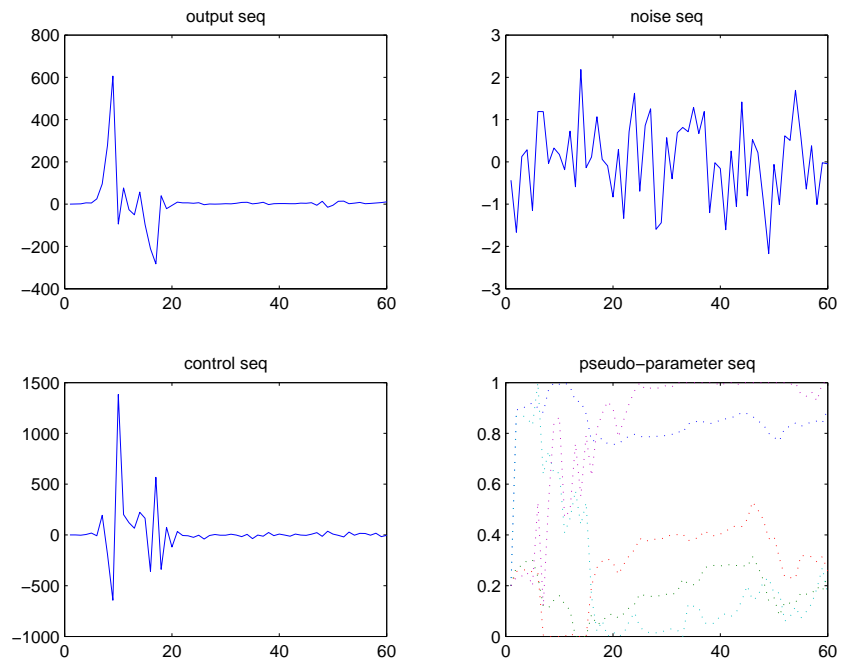


图 9.3: 算法9.1.3的仿真

## 第四部分

### 不确定复杂系统自适应控制与同步问题



## 第十章 一个复杂系统自适应控制问题的框架

本章将简单介绍一些复杂系统自适应控制问题的背景，并提出一个简单而不失本质的关于这类问题的框架。后面两章将基于本章的理论框架，研究两个具体的问题。

### 10.1 背景介绍

正如文[127]中所说，复杂系统的主要特征表现在如下几方面：动力学模型的不确定性；测量信息的粗糙性和不完整性；动态行为或扰动的随机性；离散层次和连续层次的混杂性；系统动力学的高度非线性；状态变量的高维性和分布性；各子系统间的强耦合性。复杂系统控制在规模上、复杂性及灵活性上将大大突破传统的自动控制在概念和方法上的局限性。它要求控制系统对被控对象的动力学模型要有“学习”和“识别”能力，对环境和扰动的变化要有“适应”和“稳健”能力等等。可以认为，研究智能化程度越来越高的控制方法以处理日益复杂的实际动力系统是控制理论的发展趋势。

复杂系统具有广泛的应用前景，因此已成为近年来研究的热点，吸引了很多不同领域的研究者（如[6, 12, 28, 36, 38, 51, 52, 56, 76, 85, 86, 90, 96, 108, 123, 129, 132, 134]）。尽管关于复杂系统和复杂性还没有能够为所有人普遍接受的精确定义（参看[123, 129, 132, 134, 135]），但多数研究者都认同复杂系统有很多组成部分，且“整体 $\neq$ 部分之和”（“The whole is more than the mere sum of parts”），以及具有非线性性、多层次性、不确定性等复杂特性[137]，这些复杂性特征从一定意义上可以归结为结构复杂性和信息的不确定性。关于复杂系统的控制，由于系统所具有的复杂特性，近年来逐渐成为非常有挑战性的研究课题。特别是复杂系统的自适应控制问题，目前还只有相对较少的研究（如[32, 110]）。

在过去的数十年中，自适应控制得到了长足的发展（参看[11, 21, 37, 49, 54, 64, 65]等文献），并且有了很多方面的应用。然而，传统的自适应控制还只考虑集中式控制策略，即控制器的设计需要用到系统中所有的信息。随着科学技术的发展，出现了越来越多的复杂系统，它们导致了对复杂系统控制理论的需求。特别地，很多复杂控制系统具有各种不确定性，在实际中可以找到很多这样的例子。

比如,我们考虑一个简单的例子:在一个交通拥挤的公路上,行驶着很多汽车。这些汽车的司机必须对他们的汽车施加控制,来保证汽车正常平稳的行驶,同时他们必须设法来避免可能的碰撞或追尾。在这个系统中,对每一个汽车而言,在某种意义上它可视为一个典型的控制对象,其内部有着各种各样的参数(比如速度、发动机功率、换档等)及运转规律,驾驶它的司机则通过施加控制来影响汽车的行为;但另一方面,汽车与汽车之间能够相互影响,但通常并不是任意汽车之间都有直接的影响,因此这种影响一般是局部的,由于相互影响的存在,每个汽车司机必须设法去估计附近汽车的速度或“威胁程度”,然后利用估计的结果来对自己驾驶的汽车施加控制,使得它按照一定的路径方向行驶(不同的汽车通常有不同的路径方向)。我们可以看出,这个简单的例子并不是一个传统的自适应控制问题,因为显然我们不可能有一个集中的决策者为所有的汽车设计控制律,事实恰恰相反,每个汽车司机必须根据自己所驾驶汽车的所有历史信息 and 局部范围内观察到的其它汽车的信息,来设计自己所驾驶汽车的控制律。

类似的例子还可以找到很多,比如同一市场中有竞争关系的若干公司、股票市场中的股民、资源供应网络的各个节点、通过很多计算机工作站控制的大型工控系统等等。

从上面所述的背景,有理由发展关于复杂系统自适应控制的理论,以解决实践中越来越多的复杂系统的控制问题。为理论研究方便,本章将给出研究此类问题的一个较一般的数学框架。后面的两章将在此框架下,研究两个典型的具体问题。

## 10.2 一个较一般的框架

因此,对这一类问题,我们可给出如下简单但不失本质的理论框架:

1. 整个系统包含有若干个体,每个个体的演化可通过相应的动力学方程(一般可称为状态方程)给出,各个体不必具有完全相同或类似的结构与参数;
2. 各个动力学方程通常相互耦合,即每个个体的演化可受到其它个体的影响,这种影响一般是局部的,影响的程度可用一些参数(可称为影响强度)来刻画;

3. 同时假定如下条件（简称“信息限制”）：

- (a) 每个个体完全了解自己的内部结构与参数，但并不了解其他个体的内部结构与参数；
- (b) 每个个体并不知道其它个体对自己的影响有多大，即不知道相应的影响强度；
- (c) 但每个个体除了知道的状态外，也知道与它有相互作用的其它个体的状态；

以上假设条件中，有的可以减弱或去掉，比如(a)中还可以考虑每个个体不完全了解自己的情形，即允许有部分未知的参数或结构。当然假设条件越弱，问题的难度越大。

4. 每个个体可利用它知道的信息设法估计其它个体对自己的影响，还可利用这些信息对自己施加局部控制来改变自己的状态，进而改变对其他个体的影响，从而实现整个系统的某一全局目标，比如尽可能达到所有个体间的协调一致（“同步”），或者使整个系统稳定等等。

在以上框架中，我们注意到每个个体可以而且需要发挥自己的“主观能动性”，充分利用它所能获得的各种局部信息来进行学习估计并进而设计反馈律，达到对付系统不确定性并实现其局部目标的目的。因此，我们把该框架内的每个个体称为“主体”(agent)，以区别于以往网络动力学方面多数已有的研究，这里的每个个体的动力学模式不再是一成不变的和被硬性规定的；甚至于不同的个体也可以有不同的内部动力学或不同的学习与控制算法。由于每个个体有着自适应学习(估计)和控制的过程，一般来说，整个系统的演化将比较复杂，其整体行为绝非显而易见的，这也是我们命名这一框架的原因。

值得一提的是，这一框架也不同于John Holland[51]提出的“复杂适应系统”(Complex Adaptive Systems)理论中基于多主体的建模与仿真方法(Multi-agent-based Modeling and Simulations)，因为我们并不采用基于规则的产生式系统(Rule-based generation systems)来进行仿真并从仿真中来观察系统可能有的规律。与之相反，我们可以植根于传统自适应估计与控制、自适应信号处理等领域积累的大量研究，结合系统的结构特点，为进一步从理论上深入探讨整个系统的性质提供了可能。因此，本部分的研究将作为一个尝试，在一定意义上沟通已有的“简单适应系统”(传统自适应控制)和“复杂适应系统”。

### 10.3 以上框架下可研究的问题

在前面的框架下，可以看到有很多问题需要研究。首先，传统的单系统框架内自适应控制的各种问题都可以放在前述复杂系统的框架下来研究，因此，根据所考虑子系统的结构特点和控制器设计方案等方面的不同，相应地在复杂系统情形有信息局限及耦合作用时，可以考虑类似单系统情形的各种问题；其次，在复杂系统情形，存在很多不同于单系统的地方，比如可以考虑个体局部目标与系统整体目标的关系问题、个体间如何协调与通讯、相互耦合的方式与效果、相互作用范围由什么方式给定、相互作用网络拓扑的影响等等，这些方面可能带来分析上新的困难，但值得研究以加深对复杂系统控制的理解与认识。由此可见，前述复杂系统自适应控制的框架下有很多具体问题可以研究，我们不再列举它们。

在下面两章里，我们将在此框架下对两类离散时间多主体动力学模型分别研究自适应同步问题和自适应控制问题，这两类问题关注了不同的系统全局目标：一个关注了整个系统的同步性，一个关注了整个系统的稳定性。这两章都基于最小二乘算法来设计局部学习与控制算法，我们证明了在这样的算法下，整个系统能同时实现系统全局目标和个体局部目标。

### 10.4 本章小结

本章简单介绍了复杂系统自适应控制问题的背景并给出了该类问题的一般框架，是后面两章研究的基础。接下来的两章将开始研究两类具体的系统，并给出一些理论的结果。

## 第十一章 一个离散时间多主体动力学模型自适应同步问题

本章将在前一章的框架下，提出并研究一个离散时间多主体动力学模型的自适应同步问题。在这一问题中，我们还将首次针对随机系统提出平均意义上同步的概念。本章将证明：对于四种不同的局部跟踪目标，在关于噪声和通讯限制的较弱条件下，系统中的各个主体基于最小二乘估计算法来设计局部控制器时，在平均的意义下，它们能自组织地实现所有主体的同步这一全局目标。

### 11.1 背景介绍

前一章中，我们简单介绍了一下复杂系统自适应控制问题的背景，并给出了一个研究此类问题的一般框架。在这一框架中，很自然地我们将关心如下问题：

1. 在有相互作用及各种不确定性的情况下，每个主体能否通过施加局部控制实现自己追求的局部目标？
2. 在所有主体试图实现其局部目标的过程中，整个系统能否完成一个全局的要求或目标？
3. 各主体局部目标与整个系统全局目标会有什么样的关系？

在本章中，我们将在前一章的框架下，考虑一种特殊类型的自适应控制问题，在此我们称之为自适应同步问题。为什么我们把同步问题作为研究的开始？这主要是因为：从系统全局目标来看，在某种意义上，“同步”恐怕是一种最简单和最常见的全局目标了，而且同步问题已经在很多不同的领域得到了广泛的研究。

自然界中存在着很多同步现象，同步现象在某种意义上是自然界的一个基本现象，比如惠更斯钟摆，青蛙齐鸣，萤火虫的同步发光，心肌细胞和大脑神经网络的同步等等。人类社会中也存在着很多与同步相关的现象，比如剧场中观众鼓掌频率的逐渐同步，语言涌现及其发展(谈话的同步)，人类遇到灾难时争相逃生的行为，很多人同时通过大桥时产生的共振，英特网或通讯网络中数据信息的拥塞，保密通讯中的同步，电力网络中的同步，组织管理的协调及高效运

行(代理同步)等等。可以看出,有的同步是有益的,需要利用这些同步;而有的同步是有害的,需要尽可能避免。

由于同步现象的广泛性与重要性,网络同步吸引了很多学者来研究,并且已经有了很丰富的研究成果。对于网络同步问题,前人已经进行了非常多的研究(如[5, 13, 15, 35, 46, 50, 70, 73, 74, 93, 103, 106, 107, 112, 120])。这些研究包含着很多不同方面的内容,比如两个动力学系统的耦合同步、多个混沌振子的同步、规则网络(完全连通网络)上的动力学同步、群体集体行为(鱼群聚集、大雁的飞行等)、标度无关网络(scale-free network)和小世界网络(small-world network)等复杂网络上简单动力系统的同步等等。

在复杂网络动力学同步研究方面已经有了丰硕的成果,但系统模型中引入控制项,从而真正从控制论角度研究网络同步的并不多。而且纵观所有关于网络同步的研究,我们可以注意到以下几点:

1. 在以前的研究中,每个子系统的动力学基本上都是确定性的,没有噪声的干扰和不确知的参数;
2. 在以前的研究中,子系统间的耦合也没有任何不确定性,因此各子系统间的耦合方式及强度是先验已知和固定不变的。

以上两点激发我们考虑本章的问题,我们称之为自适应同步问题。在本章的模型中,每个子系统的动力学有着两种不确定性——外部噪声干扰及未知的耦合强度,它们的存在增加了这里研究的问题的困难,也正由于它们的存在,我们要求每个子系统必须有一定的“智能”来利用它能获得的各种信息进行学习和估计,并进而对自己施加控制设法实现自己的目标。因此我们把每个子系统称为一个“主体”,以区别于以前研究中静态、被动的个体。

作为一次初步的理论尝试,本章中将假设每个主体能通过最小二乘算法利用它观测到的各种信息来估计它需要知道的参数(耦合强度),并基于此设计局部自适应控制律。由于理论研究上的困难,本章中将假设主体间的邻居关系不随时间变化,而更一般的时变情形则有待今后进一步研究。

## 11.2 问题描述

在前一章的框架下,为简单起见,我们考虑如下的离散时间网络动力学模型。在该模型中,设有 $N$ 个子系统,每个子系统代表一个个体,记 $x_i(t)$ 为个

体 $i$ 在时刻 $t$ 的状态。我们假设个体间的相互影响呈线性关系。为叙述方便，我们引入“邻居”的概念：如果某个体 $j$  ( $j \neq i$ )对个体 $i$ 有影响，就称个体 $j$ 是个体 $i$ 的一个邻居。个体 $i$ 的所有邻居记为 $\mathcal{N}_i$ 。在本章中为简单起见，我们只考虑 $x_i(t) \in \mathcal{R}$ 的情形，高维的情形请参考注11.4.6。

**系统模型：**对 $i = 1, 2, \dots, N$ ，设个体 $i$ 的动力学方程为：

$$x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + u_i(t) + \gamma_i \bar{x}_i(t) + w(t+1) \quad (11.1)$$

其中，函数 $f_i(\cdot)$ 刻画了个体 $i$ 自身的内部结构， $u_i(t)$ 为个体 $i$ 对自己施加的局部控制， $\gamma_i \bar{x}_i(t)$ 体现了其它个体对个体 $i$ 产生的影响，而 $\{w(t)\}$ 则为系统中不可观测的随机噪声干扰。这里，系数 $\gamma_i$ 反映了影响的强度，而 $\bar{x}_i(t)$ 定义为影响个体 $i$ 的其它个体状态的某一加权平均，即

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_{ij} x_j(t), \quad (11.2)$$

其中正常数 $\{g_{ij}\}$ 满足

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_{ij} = 1. \quad (11.3)$$

根据前面所述的框架，个体 $i$ 并不知道影响强度 $\gamma_i$ ，但它可以利用历史信息

$$\{x_i(t), \bar{x}_i(t), u_i(t-1), x_i(t-1), \bar{x}_i(t-1), u_i(t-2), \dots, x_i(1), \bar{x}_i(1), u_i(0)\} \quad (11.4)$$

来设法估计影响强度 $\gamma_i$ ，并进而设计局部控制 $u_i(t)$ 来试图实现自己的局部目标。

**局部目标与控制器：**由于个体间相互通讯的限制，每个个体一般来说只能追求某种局部目标。在本模型中，很自然地，我们假定每个个体要跟踪一个局部信号 $\{z_i(t)\}$ 。这里待跟踪局部信号 $\{z_i(t)\}$ 可以是确定的信号序列，也可能是与其它个体有关的某个随机信号序列。后文中将讨论 $\{z_i(t)\}$ 的不同情况。如果个体知道了其它个体对自己的影响强度，那么为达到其局部目标，其最优的局部控制应取为

$$\hat{u}_i(t) = \arg \min_{u_i(t)} E[x_i(t+1) - z_i(t)]^2, \quad (11.5)$$

由(11.1)，显然有

$$\hat{u}_i(t) = -f_i(x_i(t)) - \gamma_i \bar{x}_i(t) + z_i(t); \quad (11.6)$$

在前文所述的框架下，个体 $i$ 知道函数 $f_i(\cdot)$ ，并不知道 $\gamma_i$ ，因此根据必然等价原则，其自适应控制律可取为

$$u_i(t) = -f_i(x_i(t)) - \hat{\gamma}_i(t) \bar{x}_i(t) + z_i(t). \quad (11.7)$$

后文的工作将基于此控制律。至于如何估计 $\hat{\gamma}_i(t)$ ，我们将在下一节讨论。

**同步问题:** 上面已经定义了每个个体的学习与控制算法，个体是根据局部目标采用局部控制来演化的，那么自然要问：整个系统能否实现某个全局的目标？本章中，我们关心如下的问题：所有的个体能否自组织地达到某种意义上的“同步”？“同步”直观的可理解为对任意个体 $i$ 和 $j$  ( $i \neq j$ )， $e_{ij}(t) \triangleq x_i(t) - x_j(t)$  渐近地接近于0或者其大小渐近地达到极小。由于系统中存在随机噪声，一般来说不能要求 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ij}(t) = 0$ ，因此有必要引入如下平均意义下的渐近同步：

**定义 11.1.** 如果

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{ij}(t)| = 0, \forall i \neq j \quad (11.8)$$

则称系统实现了**渐近平均同步**。

**定义 11.2.** 如果

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_{ij}(t) = 0, \forall i \neq j \quad (11.9)$$

则称系统实现了**弱渐近平均同步**。

**定义 11.3.** 如果

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{ij}(t)|^p = 0, \forall i \neq j \quad (11.10)$$

则称系统实现了**渐近 $p$ 次平均同步**。特别地， $p = 2$ 时称系统实现了**渐近平方平均同步**。

**注11.2.1.**

容易证明，上面定义的几种“同步”有如下蕴含关系：**渐近 $p$ 次平均同步** ( $p > 2$ )  $\implies$  **渐近平方平均同步**  $\implies$  **渐近平均同步**  $\implies$  **弱渐近平均同步**。

关于待跟踪局部信号 $\{z_i(t)\}$ ，下面我们考虑如下几种情形：

- (I) “全跟踪”： $z_i(t) = z^*(t)$ ，这里 $z^*(t)$ 为一列确定性的全局跟踪信号(不必有界)，满足 $|z^*(t)| = O(t^\theta)$ ；
- (II) “中心跟踪”： $z_i(t) = \bar{z}(t)$ ，这里 $\bar{z}(t) = \frac{1}{N}(x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_N(t))$ 表示所有个体的“中心”；



(III) “松跟踪”:  $z_i(t) = \lambda \bar{x}_i(t)$ , 其中常数  $|\lambda| < 1$ ;

(IV) “紧跟踪”:  $z_i(t) = \bar{x}_i(t)$ 。

前两种情形意味着每个个体都跟踪一个共同的信号序列, 情形(I)中该序列与每个个体的状态均无关, 而情形(II)中该序列代表所有个体的中心状态。这两种情形的实际意义相当于在所有个体的上层, 有一个共同的“领导”, 它能与每个个体通讯并传达命令, 但下层的所有个体之间只有有限的通讯能力。情形(III)和(IV)则相当于“没有领导”的情况下, 每个个体试图跟踪其邻居的平均状态  $\bar{x}_i(t)$ , 两种情形的区别仅在于跟踪的紧密程度。后文将对以上情形下的自适应同步问题分别研究。

### 11.3 局部LS估计算法及控制律设计

**估计算法:** 在本章中, 为估计影响强度, 每个个体均采用常用的最小二乘(LS)算法。具体来说, 设  $\hat{\gamma}_i(t)$  表示个体  $i$  在时刻  $t$  对影响强度  $\gamma_i$  的估计值, 令

$$\begin{aligned} y_i(t) &= x_i(t) - f_i(x_i(t-1)) - u_i(t-1), \\ \eta_i(t) &= x_i(t) - f_i(x_i(t-1)) - u_i(t-1) - w(t), \end{aligned} \quad (11.11)$$

并记

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= (y_i(1), y_i(2), \dots, y_i(t))^T, \\ \bar{X}_i(t) &= (\bar{x}_i(1), \bar{x}_i(2), \dots, \bar{x}_i(t))^T, \\ W_i(t) &= (w_i(1), w_i(2), \dots, w_i(t))^T, \end{aligned} \quad (11.12)$$

则有  $Y_i(t) = \gamma_i \bar{X}_i(t) + W_i(t)$ , 自然地可定义

$$\hat{\gamma}_i(t) = \arg \min_{\gamma} \|Y_i(t) - \gamma \bar{X}_i(t)\|, \quad (11.13)$$

这里(以及下文中)  $\|\cdot\|$  代表欧氏范数, 即  $\|v\| = \sqrt{v^T v}$ 。易求得

$$\hat{\gamma}_i(t) = [\bar{X}_i^T(t) \bar{X}_i(t)]^+ [\bar{X}_i^T(t) Y_i(t)], \quad (11.14)$$

其中  $(\cdot)^+$  表示Penrose广义逆。特别地, 若  $\bar{X}_i^T(t) \bar{X}_i(t) = \sum_{k=1}^t \bar{x}_i^2(k)$  可逆(此处即非零), 则

$$\hat{\gamma}_i(t) = \left[ \sum_{k=1}^t \bar{x}_i^2(k) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^t \bar{x}_i(k) y_i(k) \right]. \quad (11.15)$$

定义

$$\begin{aligned}\bar{p}_i(t+1) &= \left[\sum_{k=1}^t \bar{x}_i^2(k)\right]^{-1}, \\ \bar{v}_i(t) &= \bar{x}_i^T(t)\bar{p}_i(t)\bar{x}_i(t) = \bar{p}_i(t)\bar{x}_i^2(t), \\ \bar{a}_i(t) &= [1 + \bar{x}_i^T(t)\bar{p}_i(t)\bar{x}_i(t)]^{-1} = [1 + \bar{v}_i(t)]^{-1},\end{aligned}\tag{11.16}$$

可将上述式子改写为递推算法

$$\begin{aligned}\bar{p}_i(t+1) &= \bar{p}_i(t) - \bar{a}_i(t)\bar{p}_i(t)\bar{x}_i(t)\bar{x}_i^T(t)\bar{p}_i(t), \\ \hat{\gamma}_i(t+1) &= \hat{\gamma}_i(t) + \bar{a}_i(t)\bar{p}_i(t)\bar{x}_i(t)[y_i(t+1) - \gamma_i(t)\bar{x}_i(t)].\end{aligned}\tag{11.17}$$

对上述算法可任取初值 $\hat{\gamma}_i(0)$ 和 $0 < \bar{p}_i(0) < \frac{1}{e}$ , 这样可保证

$$\bar{p}_i^{-1}(t+1) = \sum_{k=1}^t \bar{x}_i^2(k) + \bar{p}_i^{-1}(0) \geq \bar{p}_i^{-1}(0) > e.\tag{11.18}$$

## 11.4 主要结果

我们将证明, 以上情形中, 在适当的噪声条件下(噪声不必有界), 所有的个体通过本章所给出的自适应算法, 在时间平均的意义下, 能够渐近地实现同步。这些结果表明, 在系统存在噪声干扰以及个体间存在“信息限制”时, 各个个体能够通过自适应的学习算法, 利用局部反馈设计控制, 在追求个体局部目标实现的同时, 所有个体能够自组织的实现“同步”的全局目标。

首先我们需要引入对噪声的假设:

**假设A1:**  $\{w(t), \mathcal{F}_t\}$ 为鞅差序列(其中 $\{\mathcal{F}_t\}$ 为一非降的子 $\sigma$ 代数序列), 具有条件方差

$$E[|w(t+1)|^2 | \mathcal{F}_t] = \sigma^2 > 0 \quad a.s.\tag{11.19}$$

且存在 $\beta > 2$ 使

$$\sup_t E[|w(t+1)|^\beta | \mathcal{F}_t] < \infty \quad a.s.\tag{11.20}$$

### 注11.4.1.

假设A1自然地包含了有界的噪声, 它还允许无界的噪声(比如高斯白噪声)。在本章中为方便起见, 如果未加说明, 本章所有的结论都是“几乎处处”(a.s.)意义上的。

### 注11.4.2.

在本章中, 我们假定所有的个体受到同样的环境噪声干扰, 这一假设对于同步

问题较为自然。当然我们也可以考虑各个体分别受到不同噪声干扰的情形, 这给分析并不带来任何实质性困难, 但我们需要进一步修改下面将要给出的同步概念。下一章考虑耦合 *ARMAX* 模型的自适应控制问题时, 我们将对所有个体考虑不同的噪声序列。

**定理 11.1.** 对情形 (I)、(II)、(III), 设假设 A1 满足, 则通过前文所述的局部自适应学习与控制算法, (1) 所有个体能够渐近地正确估计其它个体对自己的影响强度, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_i(t) = \gamma_i; \quad (11.21)$$

(2) 整个系统 (11.1) 能够实现渐近平均同步, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{ij}(t)| = 0, \forall i \neq j; \quad (11.22)$$

(3) 整个系统 (11.1) 能够实现渐近平方平均同步, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{ij}(t)|^2 = 0, \forall i \neq j. \quad (11.23)$$

#### 注 11.4.3.

在定理 11.1 中, 不需要对刻画通讯限制的矩阵  $G = (g_{ij})$  加任何条件。从而情形 (I)、(II) 说明: 即便在所有个体的通讯网络不连通的情况下, 由于所有的个体受一个共同的“领导”指挥, 这样虽然各个个体的动态行为不同, 但全部个体仍能够实现渐近意义下的同步。情形 (III) 说明: 在每个个体都跟踪一个局部目标时, 看似不够“紧密”的“松”跟踪方式 (不完全向邻居的某个平均靠齐), 反而能够在任意 (固定) 通讯限制下, 实现所有个体渐近意义下的同步。

对于“紧跟踪”情形, 我们还需要对刻画通讯限制的矩阵  $G = (g_{ij})$  作如下假设:

**假设 A2:** 矩阵  $G = (g_{ij})$  为非负不可约本原矩阵。(我们约定: 若  $j \notin \mathcal{N}_i$ , 则令  $g_{ij} = 0$ 。)

#### 注 11.4.4.

假设 A2 排除了  $G$  为可约矩阵的情形。这个假设意味着  $G$  对应的图是连通的, 这样才使得所有个体在情形 (IV) 能够实现同步。矩阵  $G$  的本原性排除了  $G$  为循环矩阵的情形; 由于循环矩阵对应于周期性的 *Markov* 链, 因此在情形 (IV) 为实现同步, 也应该避免循环矩阵的情形。

**定理 11.2.** 对情形(IV), 设假设A1满足, 并假设矩阵 $G = (g_{ij})$ 满足假设A2, 则通过前文所述的局部自适应学习与控制算法, 如下结论成立:

(1) 所有个体能够渐近地正确估计其它个体对自己的影响强度, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_i(t) = \gamma_i; \quad (11.24)$$

(2) 整个系统(11.1)能够实现渐近平均同步, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{ij}(t)| = 0, \forall i \neq j; \quad (11.25)$$

(3) 整个系统(11.1)能够实现渐近平方平均同步, 即

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_{ij}(t)|^2 = 0, \forall i \neq j. \quad (11.26)$$

#### 注11.4.5.

为简单起见, 我们不再具体给出关于收敛速度的理论结果, 可以从后文的具体证明过程中或用本章给出的证明方法给出关于收敛速度的估计。

#### 注11.4.6.

本章中的结果和证明可进一步推广到高维情形, 即 $x_i(t) \in \mathcal{R}^n$ , 相应地每个常数 $g_{ij}$ 应替换为一个非负常矩阵 $G_{ij}$ , 同时保证 $G = (G_{ij})$ 仍为随机矩阵(行和为1), 并且前面的LS估计算法要作相应的修改。注意: 影响强度 $\gamma_i$ 仍然限制为一个常数。为节省篇幅, 我们不再重复具体的细节。

## 11.5 定理证明

为方便起见, 对 $i = 1, 2, \dots, N$ , 引入如下记号:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i(t) &= 1 + \sum_{k=1}^t \bar{x}_i^2(k), \\ \tilde{\gamma}_i(t) &= \gamma_i - \hat{\gamma}_i(t). \end{aligned} \quad (11.27)$$

注意到(11.18), 显然有 $\bar{r}_i(t) = \bar{p}_i^{-1}(t+1) + c_0$ , 常数 $c_0$ 由初值 $\bar{p}_i^{-1}(0)$ 决定。

### 11.5.1 一些引理

为给出定理的证明, 我们需要如下一些引理:

**引理 11.3.** 在假设条件 A1 下, 最小二乘估计算法 (11.17) 以概率 1 具有如下性质:

(1)

$$\begin{aligned} & \tilde{\gamma}_i^\tau(t+1)\bar{p}_i^{-1}(t+1)\tilde{\gamma}_i(t+1) + (1+o(1))\sum_{k=1}^t \bar{a}_i(k)[\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i^2(k)]^2 \\ & = \sigma^2 \sum_{k=1}^t \bar{a}_i(k)\bar{x}_i^\tau(k)\bar{p}_i(k)\bar{x}_i(k) + o(\log \bar{r}_i(t)) + O(1); \end{aligned} \quad (11.28)$$

(2)

$$\tilde{\gamma}_i^\tau(t+1)\bar{p}_i^{-1}(t+1)\tilde{\gamma}_i(t+1) = O(\log \bar{r}_i(t)); \quad (11.29)$$

(3)

$$\sum_{k=1}^t \bar{a}_i(k)[\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 = \sum_{k=1}^t \frac{[\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2}{1+\bar{x}_i^\tau(k)\bar{p}_i(k)\bar{x}_i(k)} = O(\log \bar{r}_i(t)); \quad (11.30)$$

(4) 若  $t \rightarrow \infty$  时

$$\bar{x}_i^\tau(t)\bar{p}_i(t)\bar{x}_i(t) \rightarrow 0, \bar{p}_i^{-1}(t) \rightarrow \infty, \quad (11.31)$$

则

$$\tilde{\gamma}_i^\tau(t+1)\bar{p}_i^{-1}(t+1)\tilde{\gamma}_i(t+1) + \sum_{k=1}^t [\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 \sim \sigma^2 \log \bar{r}_i(t). \quad (11.32)$$

令

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{w(0), w(1), \dots, w(t)\}, \quad (11.33)$$

注意到(11.1),(11.7)以及(11.17), 显然有  $x_i(t), \bar{x}_i(t) \in \mathcal{F}_t$ . 因此最小二乘算法基本性质(参看[41]书中6.3节)成立, 该引理是其特殊情况(一维情形). 其中(11.28)对应于[41]中定理6.3.1, 而(11.29)–(11.31) 分别对应于[41]中推论6.3.1, 6.3.2 和6.3.3.  $\square$

由(11.29)立即可得

**推论 11.4.** 每个主体对影响强度  $\gamma_i$  的估计值  $\hat{\gamma}_i(t)$  收敛于真值  $\gamma_i$ , 且收敛速度有如下估计

$$|\tilde{\gamma}_i(t)| = O\left(\sqrt{\frac{\log \bar{r}_i(t)}{\bar{r}_i(t)}}\right). \quad (11.34)$$

**引理 11.5. (鞅估计定理)** 设  $\{w_{n+1}, \mathcal{F}_n\}$  为一个鞅差序列,  $\{f_n, \mathcal{F}_n\}$  为一个适应序列. 令  $s_n = (\sum_{i=1}^n f_i^2)^{\frac{1}{2}}$ . 若  $\sup_n E[|w_{n+1}|^\alpha | \mathcal{F}_n] < \infty, a.s.$  其中常数  $\alpha > 2$ , 则对任意  $\delta > \frac{1}{2}$  有  $\sum_{i=1}^n f_i w_{i+1} = O(s_n (\log s_n)^\delta), a.s.$

证明: 参看[21]. □

**引理 11.6.** 在假设条件A1下, 对 $i = 1, 2, \dots, N$ , 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\sum_{k=1}^t [x_i(k)]^2 \rightarrow \infty, \bar{r}_i(t) \rightarrow \infty, \bar{p}_i^{-1}(t) \rightarrow \infty. \quad (11.35)$$

证明: 将(11.7)代入(11.1), 得闭环系统

$$x_i(t+1) = -\hat{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t) + z_i(t) + \gamma_i\bar{x}_i(t) + w(t+1) = z_i(t) + \tilde{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t) + w(t+1). \quad (11.36)$$

记 $g_i(t) = z_i(t) + \tilde{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t)$ , 显然有 $g_i(t) \in \mathcal{F}_t$ . 从而

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t [x_i(k+1)]^2 &= \sum_{k=1}^t [g_i(k) + w(k+1)]^2 \\ &= \sum_{k=1}^t [g_i(k)]^2 + \sum_{k=1}^t [w(k+1)]^2 + 2 \sum_{k=1}^t g_i(k)w(k+1). \end{aligned} \quad (11.37)$$

由假设A1和鞅估计定理, 对充分大的 $t > 1$ 有

$$|2 \sum_{k=1}^t g_i(k)w(k+1)| = O\left(\left(\sum_{k=1}^t [g_i(k)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \log\left(\sum_{k=1}^t [g_i(k)]^2 + e\right)\right). \quad (11.38)$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} [g_i(k)]^2 = \infty$ , 则 $t$ 充分大时

$$|2 \sum_{k=1}^t g_i(k)w(k+1)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t [g_i(k)]^2; \quad (11.39)$$

否则, 必有 $k \rightarrow \infty$ 时 $|g_i(k)| \rightarrow 0$ , 于是 $t$ 充分大时

$$|2 \sum_{k=1}^t g_i(k)w(k+1)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t [w(k+1)]^2. \quad (11.40)$$

从而不管哪种情况, 都有

$$\sum_{k=1}^t [x_i(k+1)]^2 \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^t \{[g_i(k)]^2 + [w(k+1)]^2\} \rightarrow \infty. \quad (11.41)$$

故由 $i$ 的任意性, 引理中第一个结论成立。

根据 $\bar{x}_i(t)$ 的定义式(11.2), 显然也有 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\sum_{k=1}^t [\bar{x}_i(k)]^2 \rightarrow \infty, \quad (11.42)$$

从而

$$\bar{r}_i(t) \rightarrow \infty, \bar{p}_i^{-1}(t) \rightarrow \infty. \quad (11.43)$$

证毕。  $\square$

**引理 11.7.** (1) 设单增非负序列  $\{S_t\}$  和非负序列  $\{D_t\}$  满足  $t \rightarrow \infty$  时  $S_{t+1} = O(S_t + D_t)$ ,  $D_{t+1} = O(D_t)$ 。则当  $t \rightarrow \infty$  时

$$|\log(S_t + D_t)| = O(t), \quad (11.44)$$

且

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(S_t + D_t)}{t} \leq \log \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1} + D_{t+1}}{S_t + D_t}; \quad (11.45)$$

特别地, 若  $t \rightarrow \infty$  时  $S_{t+1} \sim S_t, D_{t+1} \sim D_t$ , 则有

$$\log(S_t + D_t) = o(t), \frac{\log(S_t + D_t)}{t} = O(\Delta_t) = o(1), \quad (11.46)$$

其中  $X_{t+1} = S_{t+1} - S_t, d_{t+1} = D_{t+1} - D_t$ , 以及

$$\Delta_t = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \frac{X_k + d_k}{S_{k-1} + D_{k-1}}. \quad (11.47)$$

(2) 设非负序列  $\{X_t\}$  和非负序列  $\{d_t\}$  满足  $t \rightarrow \infty$  时  $X_{t+1} = O(\max(X_t, d_t))$ 。

记

$$S_t = \sum_{k=1}^t |X_k|, D_t = \sum_{k=1}^t d_k. \quad (11.48)$$

若  $t \rightarrow \infty$  时  $S_t \rightarrow \infty$ , 则有

$$S_{t+1} = O(S_t + D_t), \quad (11.49)$$

且大“O”常数满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1}}{S_t + D_t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_{t+1}}{X_t + d_t}; \quad (11.50)$$

若进一步有  $t \rightarrow \infty$  时  $d_{t+1} = O(d_t)$ , 则

$$D_{t+1} = O(D_t), S_{t+1} + D_{t+1} = O(S_t + D_t), \quad (11.51)$$

且

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1} + D_{t+1}}{S_t + D_t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_{t+1} + d_{t+1}}{X_t + d_t}. \quad (11.52)$$

证明: (1)由条件可知 $S_{t+1} + D_{t+1} = O(S_t + D_t) + O(D_t) = O(S_t + D_t)$ 成立。

记

$$\mu_{t+1} = \frac{S_{t+1}+D_{t+1}}{S_t+D_t}, \mu = \limsup_{t \rightarrow \infty} \mu_t, \quad (11.53)$$

则对任意小的 $\epsilon > 0$ , 存在整数 $m > 0$ 使得 $k > m$ 时 $\mu_k < \mu + \epsilon$ , 从而

$$S_t + D_t = (S_0 + D_0)\mu_1\mu_2 \cdots \mu_t < (S_0 + D_0)\mu_1\mu_2 \cdots \mu_m(\mu + \epsilon)^{t-m} = C_\epsilon(\mu + \epsilon)^t \quad (11.54)$$

于是

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(S_t+D_t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log C_\epsilon + t \log(\mu + \epsilon)}{t} = \log(\mu + \epsilon). \quad (11.55)$$

从而当 $t \rightarrow \infty$ 时, 显然有 $|\log(S_t + D_t)| = O(t)$ 。再由 $\epsilon$ 的任意性, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(S_t+D_t)}{t} \leq \log \mu = \log \limsup_{t \rightarrow \infty} \mu_t = \log \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1}+D_{t+1}}{S_t+D_t}, \quad (11.56)$$

前半部分得证。

若 $t \rightarrow \infty$ 时 $S_{t+1} \sim S_t, D_{t+1} \sim D_t$ , 则显然有 $\mu = 1$ , 于是 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(S_t+D_t)}{t} = \log 1 = 0; \quad (11.57)$$

然后记

$$\delta_{t+1} = \frac{X_{t+1}+d_{t+1}}{S_t+D_t}, \quad (11.58)$$

显然 $t \rightarrow \infty$ 时 $\delta_t \rightarrow 0$ , 且注意到

$$\log \frac{S_{t+1}+D_{t+1}}{S_t+D_t} = \log(1 + \delta_{t+1}) = \delta_{t+1} + o(\delta_{t+1}), \quad (11.59)$$

易知

$$\frac{\log(S_t+D_t)}{t} = O\left(\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \delta_k\right) = O(\Delta_{t+1}) = o(1), \quad (11.60)$$

(2)记

$$\nu_{t+1} = \frac{X_{t+1}}{X_t+d_t}, \nu = \limsup_{t \rightarrow \infty} \nu_t, \quad (11.61)$$

于是

$$S_{t+1} = S_1 + \sum_{k=1}^t X_{k+1} = S_1 + \sum_{k=1}^t \nu_{k+1}(X_k + d_k). \quad (11.62)$$

由条件知 $\nu_{t+1} = O(1)$ , 故显然有

$$S_{t+1} = O(1) + O\left(\sum_{k=1}^t X_k + \sum_{k=1}^t d_k\right) = O(S_t + D_t). \quad (11.63)$$



且对任意小的 $\epsilon > 0$ , 存在整数 $m > 0$ 使得 $k > m$ 时 $\nu_k < \nu + \epsilon$ , 从而

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_1 + \sum_{k=1}^t \nu_{k+1}(X_k + d_k) \\ &\leq (S_1 + \cdots + S_m) + (\nu + \epsilon) \sum_{k=m}^t (X_k + d_k) \\ &\leq C_\epsilon + (\nu + \epsilon)(S_t + D_t), \end{aligned} \quad (11.64)$$

且由条件 $t \rightarrow \infty$ 时 $S_t \rightarrow \infty$ , 得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1}}{S_t + D_t} \leq \nu + \epsilon. \quad (11.65)$$

根据 $\epsilon$ 的任意性, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_{t+1}}{S_t + D_t} \leq \nu = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X_{t+1}}{X_t + d_t}. \quad (11.66)$$

类似可证后半部分结论。  $\square$

**引理 11.8.** 考虑迭代系统

$$X_{t+1} = A_t X_t + W_t, \quad (11.67)$$

其中 $\|W_t\| = O(t^\delta)$ ,  $\delta$ 为任意非负常数, 且 $t \rightarrow \infty$ 时 $A_t \rightarrow A$ . 设 $\rho$ 为 $A$ 的谱半径, 即 $\rho = \max\{|\lambda(A)|\}$ . 记 $S_t = 1 + \sum_{k=1}^t \|X_k\|^2$ . 则对任意 $\epsilon > 0$ , 有

$$\begin{aligned} \|X_t\| &= o(t^\delta(\rho + \epsilon)^t) + O(t^\delta), \\ S_t &= o(t^{2\delta+1}(\rho + \epsilon)^{2t}) + O(t^{2\delta+1}). \end{aligned} \quad (11.68)$$

从而有(1)若 $\rho \in [0, 1)$ , 则 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{\log S_t}{t} = O\left(\frac{\log t}{t}\right) = o(1); \quad (11.69)$$

(2)若 $\rho = 1$ , 则 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{\log S_t}{t} = o(1); \quad (11.70)$$

(3)若 $\rho > 1$ , 则 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{\log S_t}{t} = O(1). \quad (11.71)$$

证明: 由于 $\rho$ 为 $A$ 的谱半径, 故对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在某矩阵范数 $\|\cdot\|_p$ 使得 $\|A\|_p < \rho + \frac{\epsilon}{2}$ ; 因为 $t \rightarrow \infty$ 时 $A_t \rightarrow A$ , 故有 $\|A_t\|_p \rightarrow \|A\|_p$ , 因而 $t$ 充分大时,

$$\|A_t\|_p < \|A\|_p + \frac{\epsilon}{2} < \rho + \epsilon, \quad (11.72)$$

根据矩阵范数间的等价性,  $\|W_t\|_p = O(\|W_t\|) = O(t^\delta)$ , 从而 $t$ 充分大时,

$$\|X_{t+1}\|_p \leq \|A_t\|_p \|X_t\|_p + \|W_t\|_p \leq (\rho + \epsilon) \|X_t\|_p + C_p t^\delta. \quad (11.73)$$

迭代下去,

$$\begin{aligned} \|X_t\|_p &\leq C_p \sum_{k=1}^{t-m} (\rho + \epsilon)^{k-1} (t-k)^\delta + (\rho + \epsilon)^{t-m} \|X_m\|_p \\ &\leq C_p t^\delta \sum_{k=1}^{t-m} (\rho + \epsilon)^{k-1} + (\rho + \epsilon)^{t-m} \|X_m\|_p, \end{aligned} \quad (11.74)$$

其中 $m$ 为一个依赖于 $\epsilon, \rho$ 的常数。由上式易知

$$\|X_t\|_p = O(t^\delta[(\rho + \epsilon)^t + O(1)]) + O((\rho + \epsilon)^t) = O(t^\delta(\rho + \epsilon)^t + t^\delta). \quad (11.75)$$

由 $\epsilon$ 的任意性及矩阵范数间的等价性, 有

$$\|X_t\| = o(t^\delta(\rho + \epsilon)^t) + O(t^\delta). \quad (11.76)$$

且由 $S_t$ 的定义以及矩阵范数间的等价性,

$$\begin{aligned} S_t &= O\left(\sum_{k=1}^t \|X_k\|_p^2\right) \\ &= O\left(\sum_{k=1}^t [k^{2\delta}(\rho + \epsilon)^{2k} + k^{2\delta}]\right) \\ &= O(t^{2\delta+1}[(\rho + \epsilon)^{2t} + O(1)] + t^{2\delta+1}) \\ &= O(t^{2\delta+1}(\rho + \epsilon)^{2t} + t^{2\delta+1}); \end{aligned} \quad (11.77)$$

再由 $\epsilon$ 的任意性, 可得

$$S_t = o(t^{2\delta+1}(\rho + \epsilon)^{2t}) + O(t^{2\delta+1}). \quad (11.78)$$

(1)若 $\rho < 1$ , 则对充分小的 $\epsilon$ , 有 $S_t = O(t^{2\delta+1})$ , 因此

$$\frac{\log S_t}{t} = O\left(\frac{(2\delta+1)\log t}{t}\right) = o(1); \quad (11.79)$$

(2)若 $\rho = 1$ ,则对任意的 $\epsilon$ ,

$$S_t = O(t^{2\delta+1}(1 + \epsilon)^{2t}), \log S_t = O((2\delta + 1) \log t + 2t \log(1 + \epsilon)), \quad (11.80)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时,有

$$\frac{\log S_t}{t} = O\left(\frac{(2\delta+1) \log t + o(2t)}{t}\right) = o(1); \quad (11.81)$$

(3)若 $\rho > 1$ ,则

$$\begin{aligned} S_t &= O(t^{2\delta+1}(\rho + \epsilon)^{2t}), \\ \log S_t &= O((2\delta + 1) \log t + 2t \log(\rho + \epsilon)) = O(2 \log \rho \cdot t), \end{aligned} \quad (11.82)$$

显然有

$$\frac{\log S_t}{t} = O(\log \rho). \quad (11.83)$$

引理证毕。  $\square$

### 注11.5.1.

引理11.8中的估计方法非常粗糙;若利用引理11.5,可得到更为精确的估计。

**引理 11.9.** 考虑迭代系统

$$X_{t+1} = A_t X_t + W_t, \quad (11.84)$$

其中 $t \rightarrow \infty$ 时 $A_t \rightarrow A$ ,且 $\{W_t\}$ 满足:

$$\sum_{k=1}^t \|W_k\|^2 = o(t). \quad (11.85)$$

若 $A$ 的谱半径 $\rho < 1$ ,则

$$\sum_{k=1}^t \|X_k\| = o(t), \sum_{k=1}^t \|X_k\|^2 = o(t). \quad (11.86)$$

证明:可类似引理11.8得证。  $\square$

**引理 11.10.** 设矩阵 $G$ 为随机矩阵(即行和均为1的非负矩阵),则 $G$ 有特征值1,且 $G$ 的谱半径为1.

证明:该引理是矩阵论[91]中Perron-Frobenius定理的直接推论。  $\square$

**引理 11.11.** 在假设条件A1下, 对于情形(I),(II),(III),(IV), 当  $t \rightarrow \infty$  时, 对  $i = 1, 2, \dots, N$  都有  $\frac{\log r_i(t)}{t} = o(1)$ , *a.s.*

证明: 将(11.7)代入(11.1), 得闭环系统

$$x_i(t+1) = -\hat{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t) + z_i(t) + \gamma_i\bar{x}_i(t) + w(t+1) = z_i(t) + \tilde{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t) + w(t+1). \quad (11.87)$$

记

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T, \\ Z(t) &= (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))^T, \\ \bar{X}(t) &= (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_N(t))^T, \\ W(t+1) &= w(t+1)\mathbf{1} = (w(t+1), w(t+1), \dots, w(t+1))^T, \\ \tilde{\Gamma}(t) &= \text{diag}(\tilde{\gamma}_1(t), \tilde{\gamma}_2(t), \dots, \tilde{\gamma}_N(t))^T, \end{aligned} \quad (11.88)$$

于是有

$$X(t+1) = Z(t) + \tilde{\Gamma}(t)\bar{X}(t) + W(t+1). \quad (11.89)$$

根据(11.2), 有

$$\bar{X}(t) = GX(t), \quad (11.90)$$

其中矩阵  $G = (g_{ij})$ , 我们约定若  $j \notin \mathcal{N}_i$ , 则令  $g_{ij} = 0$ . 进一步可得

$$\bar{X}(t+1) = GX(t+1) = GZ(t) + G\tilde{\Gamma}(t)\bar{X}(t) + W(t+1). \quad (11.91)$$

由推论11.4,  $t \rightarrow \infty$  时  $\tilde{\gamma}(t) \rightarrow 0$ , 因而  $\tilde{\Gamma}(t) \rightarrow 0$ .

由假设A1, 可推知

$$|w_{t+1}| = O(t^\delta), \text{ a.s. } \forall \delta \in (\frac{1}{\beta}, \frac{1}{2}). \quad (11.92)$$

事实上, 根据假设A1, 利用Markov不等式, 有

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(w_{t+1}^2 \geq t^{2\delta} | \mathcal{F}_t) \leq \sum_{t=1}^{\infty} \frac{E[|w_{t+1}|^\beta | \mathcal{F}_t]}{t^{2\delta}} < \infty, \text{ a.s.} \quad (11.93)$$

再由Borel-Cantelli-Levy引理[24], 即得  $|w_{t+1}| = O(t^\delta)$ , *a.s.*

记  $S(t) = 1 + \sum_{k=1}^t \|\bar{X}(k)\|^2$ . 下面分别考虑各个情形:

(I)“全跟踪”情形：这时 $Z(t) = z^*(t)\mathbf{1}$ ，其中 $z^*(t) = O(t^\delta)$ 为一列确定信号。于是显然有

$$\|GZ(t) + W(t+1)\| = O(t^\delta). \quad (11.94)$$

从而由引理11.8，得

$$\|\bar{X}(t)\| = O(t^\delta), \frac{\log S(t)}{t} = O\left(\frac{(2\delta+1)\log t}{t}\right) = o(1); \quad (11.95)$$

(II)“中心跟踪”情形：这时 $Z(t) = \frac{1}{N}E_N X(t)$ ，其中 $E_N$ 表示 $N$ 阶全1矩阵。于是

$$X(t+1) = \frac{1}{N}E_N X(t) + \tilde{\Gamma}(t)GX(t) + W(t+1) = \left(\frac{1}{N}E_N + \tilde{\Gamma}(t)G\right)X(t) + W(t+1). \quad (11.96)$$

注意到 $t \rightarrow \infty$ 时 $\frac{1}{N}E_N + \tilde{\Gamma}(t)G \rightarrow \frac{1}{N}E_N$ ，以及由引理11.10知 $\frac{1}{N}E_N$ 的谱半径为1，联合引理11.8，得

$$\begin{aligned} \|X(t)\| &= O(t^\delta), \|\bar{X}(t)\| = \|GX(t)\| = O(t^\delta), \\ \frac{\log S(t)}{t} &= O\left(\frac{(2\delta+1)\log t}{t}\right) = o(1); \end{aligned} \quad (11.97)$$

(III)“松跟踪”情形：这时 $Z(t) = \lambda\bar{X}(t)$ ，其中 $\lambda \in (0, 1)$ 。于是

$$\bar{X}(t+1) = (\lambda G + G\tilde{\Gamma}(t))\bar{X}(t) + W(t+1). \quad (11.98)$$

由引理11.10知 $G$ 的谱半径为1，又注意到 $t \rightarrow \infty$ 时 $\lambda G + G\tilde{\Gamma}(t) \rightarrow \lambda G$ ，再联合引理11.8，得

$$\|\bar{X}(t)\| = O(t^\delta), \frac{\log S(t)}{t} = O\left(\frac{(2\delta+1)\log t}{t}\right) = o(1); \quad (11.99)$$

(IV)“紧跟踪”情形：这时 $Z(t) = \bar{X}(t)$ ，于是

$$\bar{X}(t+1) = (G + G\tilde{\Gamma}(t))\bar{X}(t) + W(t+1). \quad (11.100)$$

由引理11.10， $G$ 的谱半径为1，又注意到 $t \rightarrow \infty$ 时 $G + G\tilde{\Gamma}(t) \rightarrow G$ ，从而再由引理11.8，得

$$\|X_t\| = o(t^\delta(1+\epsilon)^t) + O(t^\delta), \frac{\log S(t)}{t} = o(1). \quad (11.101)$$

综上，总有 $\frac{\log S(t)}{t} = o(1)$ 。由于 $|\bar{x}_i(t)| = O(\|\bar{X}(t)\|)$ ，根据 $\bar{r}_i(t)$ 与 $S(t)$ 的定义，显然 $\bar{r}_i(t) = O(S(t))$ ，从而当 $t \rightarrow \infty$ 时，对 $i = 1, 2, \dots, N$ 都有

$$\frac{\log \bar{r}_i(t)}{t} = o(1). \quad (11.102)$$

□

**引理 11.12.** 在假设条件A1下, 对于情形(I), (II), (III)和(IV), 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对 $i = 1, 2, \dots, N$ 都有: 对任意整数 $m \geq 1, 0 \leq d < m$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^t |\tilde{\gamma}_i(mk-d)\bar{x}_i(mk-d)|^2 &= o(t), \\ \left| \sum_{k=1}^t \tilde{\gamma}_i(mk-d)\bar{x}_i(mk-d) \right| &\leq \sum_{k=1}^t |\tilde{\gamma}_i(mk-d)\bar{x}_i(mk-d)| = o(t). \end{aligned} \quad (11.103)$$

证明: 由引理11.3中式(11.30),

$$\sum_{k=1}^t \bar{a}_i(k) [\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 = O(\log \bar{r}_i(t)). \quad (11.104)$$

注意到(可用引理11.7及引理11.8)

$$\bar{v}_i(k) = \bar{p}_i(k)\bar{x}_i^2(k) = \frac{\bar{x}_i^2(k)}{\sum_{j=1}^{k-1} \bar{x}_i^2(j)} = O(1) \quad (11.105)$$

故有

$$\sum_{k=1}^t [\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 = \sum_{k=1}^t \bar{a}_i(k) [\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 \cdot [1 + \bar{v}_i(k)] = O(\log \bar{r}_i(t)). \quad (11.106)$$

再由引理11.11, 即得

$$\sum_{k=1}^t [\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 = o(t). \quad (11.107)$$

进而由Schwarz不等式,

$$\sum_{k=1}^t |\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)| \leq \left( \sum_{k=1}^t [\tilde{\gamma}_i(k)\bar{x}_i(k)]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^t 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(\sqrt{t \log \bar{r}_i(t)}) = o(t). \quad (11.108)$$

这样 $m = 1$ 时引理已得证。对 $m > 1$ , 将 $t$ 换为 $mt$ 即得证。□

**引理 11.13.** 设矩阵 $A_{n \times n}$ 秩为1, 则 $A$ 的全部特征值为 $\text{tr}A, 0, \dots, 0$ , 其中0为 $n - 1$ 重特征根。

**证明:**  $n = 1$ 时显然, 只需证 $n > 1$ 时成立。由于矩阵 $A$ 秩为1, 必存在非零列向量 $u, v$ 使得 $A = uv^T$ 。显然 $\text{tr}A = \text{tr}(uv^T) = \text{tr}(v^T u) = v^T u$ 。注意到 $Au = uv^T u = u(v^T u) = (v^T u)u$ , 故 $v^T u$ 为 $A$ 的一个特征值, 且 $u$ 为 $A$ 一个特征向量。另外, 显然线性方程组 $Ax = 0$ 有 $n - 1$ 个线性无关的非零解, 故0为 $n - 1$ 重特征根。□

## 11.5.2 定理的证明

定理11.1的证明: 由(11.87), 有

$$x_i(t+1) - z_i(t) - w(t+1) = \tilde{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t). \quad (11.109)$$

任取常数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ 使得

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \quad (11.110)$$

为方便起见, 记

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^\tau, \\ X(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^\tau, \\ Z(t) &= (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))^\tau, \\ \bar{X}(t) &= (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \dots, \bar{x}_N(t))^\tau, \end{aligned} \quad (11.111)$$

这时显然有

$$\alpha^\tau X(t+1) - \alpha^\tau Z(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t+1) - \sum_{i=1}^N \alpha_i z_i(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i [\tilde{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t)]. \quad (11.112)$$

情形(I): 这时 $z_i(t) = z^*(t)$ , 故

$$\alpha^\tau Z(t) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right) z^*(t) = 0. \quad (11.113)$$

对任意的 $i \neq j$ , 不妨设 $i = 1, j = N$ , 取

$$\alpha = (1, 0, \dots, 0, -1)^\tau, \quad (11.114)$$

显然有

$$e_{1N}(t+1) = \alpha^\tau X(t+1) = [\tilde{\gamma}_1(t)\bar{x}_1(t)] - [\tilde{\gamma}_N(t)\bar{x}_N(t)]. \quad (11.115)$$

于是由引理11.12,

$$\sum_{k=1}^t |e_{1N}(k+1)|^2 = O\left(\sum_{k=1}^t [\tilde{\gamma}_1(k)\bar{x}_1(k)]^2\right) + O\left(\sum_{k=1}^t [\tilde{\gamma}_N(k)\bar{x}_N(k)]^2\right) = o(t), \quad (11.116)$$

类似地

$$\sum_{k=1}^t |e_{1N}(k+1)| = o(t). \quad (11.117)$$

情形(II): 这时  $z_i(t) = \bar{z}(t)$ , 证明同情形(I)。

情形(III): 这时  $z_i(t) = \lambda \bar{x}_i(t)$ , 故  $Z(t) = \lambda \bar{X}(t) = \lambda GX(t)$ 。

注意到  $\alpha^\tau \mathbf{1} = 0$  及  $G\mathbf{1} = \mathbf{1}$ , 于是有

$$\begin{aligned}
 & \alpha^\tau X(t+1) - \alpha^\tau Z(t) \\
 = & \alpha^\tau X(t+1) - \lambda \alpha^\tau GX(t) \\
 = & \alpha^\tau [X(t+1) - x_j(t+1)\mathbf{1}] + x_j(t+1)\alpha^\tau \mathbf{1} - \lambda \alpha^\tau G[X(t) - x_j(t)\mathbf{1}] - \lambda x_j(t)\alpha^\tau G\mathbf{1} \\
 = & \alpha^\tau [X(t+1) - x_j(t+1)\mathbf{1}] - \lambda \alpha^\tau G[X(t) - x_j(t)\mathbf{1}] \\
 = & \sum_{i \neq j} \alpha_i e_{ij}(t+1) - \sum_{i \neq j} \lambda \beta_i e_{ij}(t),
 \end{aligned} \tag{11.118}$$

其中

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)^\tau = G^\tau \alpha. \tag{11.119}$$

为方便起见, 记  $e_i(t) = x_i(t) - x_N(t)$ , 显然  $e_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t) = e_i(t) - e_j(t)$ 。将其代入(11.118), 并注意到

$$\alpha_j = -\sum_{i \neq j} \alpha_i, \beta_j = -\sum_{i \neq j} \beta_i, \tag{11.120}$$

得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \alpha_i [\tilde{\gamma}_i(t) \bar{x}_i(t)] \\
 = & \alpha^\tau X(t+1) - \alpha^\tau Z(t) \\
 = & \sum_{i \neq j} \alpha_i e_i(t+1) - \sum_{i \neq j} \alpha_i e_j(t+1) - \sum_{i \neq j} \lambda \beta_i e_i(t) + \sum_{i \neq j} \lambda \beta_i e_i(t) \\
 = & \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i(t+1) - \sum_{i=1}^N \lambda \beta_i e_j(t).
 \end{aligned} \tag{11.121}$$

为方便起见, 记  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\tau$ , 其中第  $i$  个元素为 1, 其他元素均为 0。对  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , 取  $\alpha = \alpha^{(i)} = e_i - e_N$ , 相应的  $\beta = \beta^{(i)} = G^\tau (e_i - e_N)$ , 从而得

$$e_i(t+1) = \lambda [\beta^{(i)}]^\tau E(t) + [\tilde{\gamma}_i(t) \bar{x}_i(t)] - [\tilde{\gamma}_N(t) \bar{x}_N(t)], \tag{11.122}$$

其中  $E(t) = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_{N-1}(t), 0)^\tau$ 。

将上式改写成矩阵形式, 得

$$E(t+1) = \lambda H E(t) + \xi(t), \tag{11.123}$$



其中

$$\begin{aligned}\xi(t) &= [\eta(t) - \eta_N(t)\mathbf{1}], \\ \eta(t) &= (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_N(t))^\tau, \quad \eta_i(t) = \tilde{\gamma}_i(t)\bar{x}_i(t), \\ H &= (h_{ij})_{N \times N}, \quad h_{ij} = g_{ij} - g_{Nj}.\end{aligned}\tag{11.124}$$

由引理11.12, 知

$$\sum_{k=1}^t \|\eta(k)\|^2 = o(t),\tag{11.125}$$

从而

$$\sum_{k=1}^t \|\xi(k)\|^2 = o(t).\tag{11.126}$$

下证 $H$ 的谱半径 $\rho(H) \leq 1$ , 从而 $\lambda H$ 的谱半径 $\rho(\lambda H) \leq \lambda < 1$ 。

事实上易知 $H = G - G_N$ , 其中

$$\begin{aligned}G_N &= (g_N, g_N, \dots, g_N)^\tau = \mathbf{1}g_N^\tau, \\ g_N &= (g_{N1}, g_{N2}, \dots, g_{NN})^\tau.\end{aligned}\tag{11.127}$$

由 $G_N$ 的特点, 可以求得 $G_N$ 的全部特征值为 $\{1, 0, \dots, 0\}$ 。另外由引理11.10,  $\lambda_{\max}(G) = 1$ 。因此任取向量 $v$ , 使得 $\|v\|^2 = v^\tau v = 1$ , 则有

$$\begin{aligned}|v^\tau H v| &= |v^\tau G v - v^\tau G_N v| \\ &\leq \max(\lambda_{\max}(G)\|v\|^2 - \lambda_{\min}(G_N)\|v\|^2, \lambda_{\max}(G_N)\|v\|^2 - \lambda_{\min}(G)\|v\|^2) \\ &\leq \max(\|v\|^2, \lambda_{\max}(G_N)\|v\|^2) \\ &= 1,\end{aligned}\tag{11.128}$$

故有 $H$ 的谱半径必不超过1。

最后由(11.123), 利用引理11.9, 立即可得

$$\sum_{k=1}^t \|E(k)\| = o(t), \quad \sum_{k=1}^t \|E(k)\|^2 = o(t).\tag{11.129}$$

这就证明了 $t \rightarrow \infty$ 时, 对 $i = 1, 2, \dots, N-1$ 都有

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^t |e_i(k)| \rightarrow 0, \quad \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t [e_i(k)]^2 \rightarrow 0.\tag{11.130}$$

□

**定理11.2的证明:** 该定理证明类似定理11.1。

情形(IV): 这时  $z_i(t) = \bar{x}_i(t)$ 。该情形非常类似情形(III), 只需把  $\lambda$  换成 1。如果能证明  $H$  的谱半径  $\rho(H) < 1$ , 则仍可利用引理 11.9, 从而可得到完全相同的结论。在定理 11.1 中, 已经证明了  $H$  的谱半径不超过 1, 即  $\rho(H) \leq 1$ 。下证在定理 11.2 的条件下, 必有  $H$  的谱半径严格小于 1, 即  $\rho(H) < 1$ 。

考虑如下线性系统

$$\zeta(t+1) = G\zeta(t), \quad \zeta(0) = \zeta_0. \quad (11.131)$$

注意到  $G$  为一个随机矩阵, 由假设 A2 和马氏链的知识, 我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G^t = \mathbf{1}\pi^\tau, \quad (11.132)$$

其中  $\pi$  是具有转移概率阵  $G$  的有限状态马氏链唯一的平稳概率分布。因此

$$\zeta(t) = G^t \zeta_0 \rightarrow \mathbf{1}\pi^\tau \zeta_0 = (\pi^\tau \zeta_0) \mathbf{1}, \quad (11.133)$$

这意味着  $\zeta(t)$  的所有元素收敛于同一个常数  $\pi^\tau \zeta_0$ 。令  $\zeta(t) = (\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_N(t))^\tau$  并令  $\nu(t) = (\nu_1(t), \nu_2(t), \dots, \nu_{N-1}(t), 0)^\tau$ , 其中对  $i = 1, 2, \dots, N$ , 定义  $\nu_i(t) = \zeta_i(t) - \zeta_N(t)$ 。则我们可看到

$$\nu(t+1) = (G - G_N)\nu(t) = H\nu(t), \quad (11.134)$$

而且对任意初始值  $\nu_i(0) \in \mathcal{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, N-1$ ), 都有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) = 0$ 。显然  $\nu(t) = H^t \nu(0)$ , 而且矩阵  $H^t$  的第  $N$  行全为 0 (这是因为  $H$  的第  $N$  行全为 0)。因此  $H^t$  可如下分块

$$H^t \triangleq \begin{pmatrix} H_0(t) & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.135)$$

其中  $H_0(t)$  是一个  $(N-1) \times (N-1)$  矩阵。于是对  $i = 1, 2, \dots, N-1$ , 分别取  $\nu(0) = \mathbf{e}_i$  再由  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu(t) = 0$ , 易得  $t \rightarrow \infty$  时  $H_0(t)$  的第  $i$  列趋于一个零向量。所以我们有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_0(t) = 0, \quad (11.136)$$

相应地  $H_0(t)$  的每个特征值也趋于 0。由 (11.135) 可知, 除了零特征值外,  $H^t$  的其它特征值与  $H_0(t)$  的非零特征值完全相同, 因此我们可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(H^t) = 0, \quad (11.137)$$

这也就蕴含着

$$\rho(H) < 1. \quad (11.138)$$

从而定理 11.2 得证。□

## 11.6 仿真例子

大量的仿真例子验证了我们前面给出的学习算法的有效性，并验证了我们前面给出的理论结果。本节我们将通过一些仿真结果以给出直观展示。

**仿真设置:** 所有的仿真使用同样的设置，我们取主体的个数  $N = 5$ ，时间步数  $T = 40$ ，噪声序列  $\{w_i\}$  取为标准高斯白噪声  $N(0; 1)$ ，矩阵  $G$  为随机生成的随机矩阵，影响强度  $\gamma_i$  从区间  $[0, 1]$  中随机选取。在每个图中，给出了6个子图，分别表示系统状态  $x_i(t)$ ，控制信号  $u_i(t)$ ，噪声序列  $w(t)$ ，影响强度  $\gamma_i$  的估计值  $\hat{\gamma}_i(t)$ ，同步误差  $\{e_i(t)\}$  的累积一次平均值  $m_i^{(1)}(t)$  和累积二次平均值  $m_i^{(2)}(t)$  的变化曲线。这里

$$\begin{aligned} e_i(t) &\triangleq x_i(t) - x_1(t), \\ m_i^{(1)}(t) &\triangleq \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t |e_i(k)|, \\ m_i^{(2)}(t) &\triangleq \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t |e_i(k)|^2. \end{aligned} \quad (11.139)$$

**情形(I)——“确定性跟踪”:**  $z_i(t) = z^*(t)$ 。这里我们取  $z^*(t) = 10 \sin \frac{t}{3}$ 。图11.1显示了该情形下的一个仿真例子。

**情形(II)——“中心跟踪”:**  $z_i(t) = \bar{z}(t)$ 。图11.2显示了该情形下的一个仿真例子。

**情形(III)——“松跟踪”:**  $z_i(t) = \lambda \bar{x}_i(t)$ 。这里我们取  $\lambda = 0.7$ 。图11.3显示了该情形下的一个仿真例子。

**情形(IV)——“紧跟踪”:**  $z_i(t) = \bar{x}_i(t)$ 。图11.4显示了该情形下的一个仿真例子。

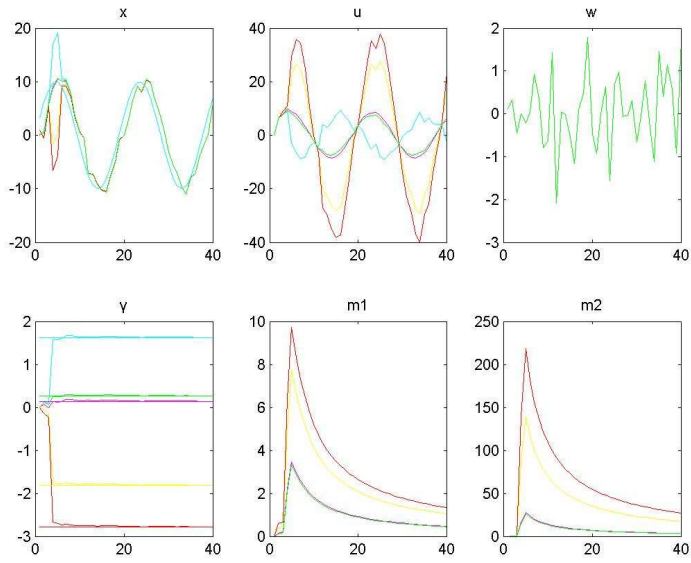


图 11.1: 确定性跟踪情形

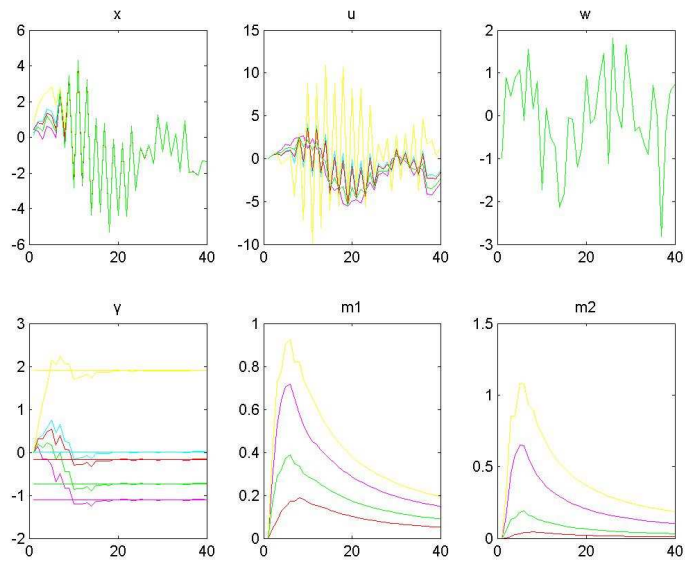


图 11.2: 中心跟踪情形

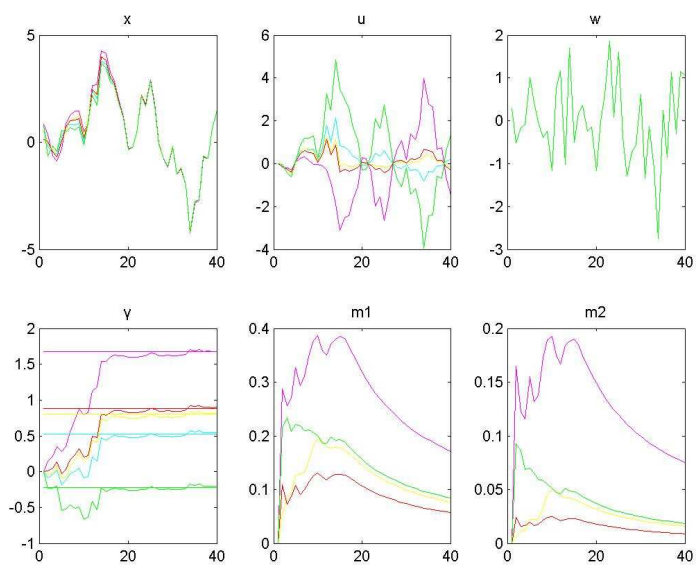


图 11.3: 松跟踪情形

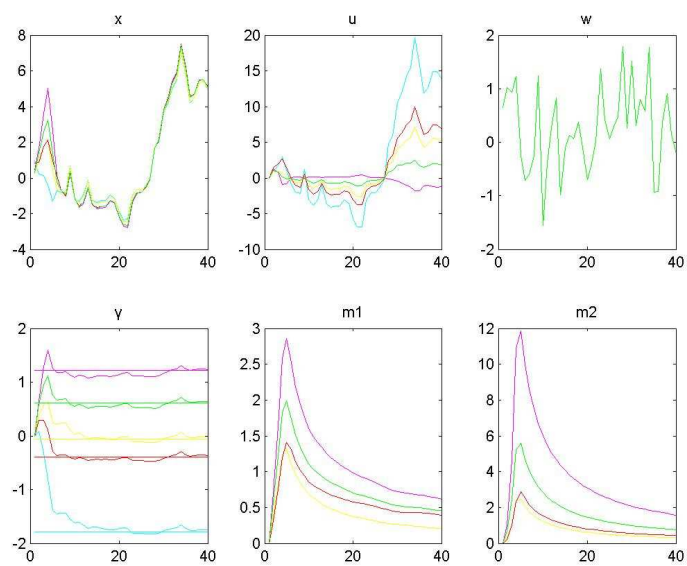


图 11.4: 紧跟踪情形

## 11.7 本章小结

本章在前一章的框架下, 提出并研究了一个离散时间多主体动力学模型的自适应同步问题。证明了对于四种不同的局部跟踪目标, 在关于噪声和通讯限制的较弱条件下, 系统中的各个主体能通过学习估计算法来设计局部控制器, 最终整个系统实现平均意义上的同步这个全局目标。这就在一定意义上说明主体的局部目标和整个系统的全局目标是辩证统一的。

本章中的问题还可以进一步研究, 比如考虑通讯限制(反映为矩阵 $G$ )时变的情形、每个主体内部还有未知参数、采用其它学习估计算法等等。当然这些问题在理论上都有一定的难度。

## 第十二章 一个离散时间多主体动力学模型自适应控制问题

前一章研究了自适应同步问题，关注的全局目标是同步性质。本章中将在同样的框架下，关注稳定性这一全局目标。对本章中的离散时间多主体动力学模型（耦合ARMAX模型），我们允许每个主体内部有未知参数、主体间有未知耦合强度、并且系统还受有色噪声干扰（驱动噪声的增益也可以未知），在这样的条件下，我们将对每个主体设计自校正调节器型局部控制器，由于这些主体间的耦合，因此对每个单系统的自校正调节器，不能再直接套用已有自校正调节器的稳定性结果。但我们在本章中将说明已有的分析方法仍可以应用于分析复杂系统情形，在此方法基础上我们将证明：使得单个自校正调节器系统稳定与最优的那些条件也保证了整个系统的稳定性和最优性。

### 12.1 背景介绍

第十章中介绍了复杂系统自适应控制的一些背景，给出了一个一般的研究此类问题的框架。进而，在此框架下，前一章中研究了一个简单的离散时间多主体动力学模型的自适应同步问题。对于自适应同步问题，我们主要研究的是系统的同步性质，并没有关注稳定性问题。

在本章中，我们将在同样的框架下，研究一个离散时间多主体动力学模型的自适应控制问题，关心的重点是整个系统的稳定性。稳定性是控制系统研究的核心问题，对复杂系统自适应控制问题自然也不例外。问题的一些背景在第十章中已有介绍，本章不再重复。

本章中考虑的子系统的内部结构具有一般的ARMAX模型的结构，与以前关于ARMAX模型自适应控制问题的不同在于：有多个具有类似结构的子系统（可含有未知参数），相互间通过未知的权向量耦合在一起，因此每个主体只能利用局部的信息来估计它需要知道的未知参数与耦合强度，并进而对自己施加局部控制。本章中仍然利用最小二乘算法来进行学习和估计，为简单起见，我们假设每个子系统中控制信号的高频增益均已知，相应的自适应控制器在文献中常被称为Åström-Wittenmark型自校正调节器。

由于子系统间的耦合，因此对每个单系统，将不能再直接套用已有自校正调节器的稳定性结果。但我们在本章中将说明：陈翰馥院士和郭雷院士给出的

分析方法对于分析这里的问题仍然是有效的,我们将基于这套方法和其它一些技巧,在一定条件下证明整个系统的稳定性。

## 12.2 问题描述

### 12.2.1 模型

考虑如下的系统: 设系统中有 $N$ 个主体, 每个主体的状态 $x_i(t)$ 满足如下的动力学方程

$$\begin{aligned} & x_i(t+1) + a_{i1}x_i(t) + a_{i2}x_i(t-1) + \cdots + a_{i,p_i}x_i(t-p_i+1) \\ = & [b_{i1}u_i(t) + b_{i2}u_i(t-1) + \cdots + b_{i,q_i}u_i(t-q_i+1)] + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_{ij}x_j(t) \quad (12.1) \\ & + [w_i(t+1) + c_{i1}w_i(t) + c_{i2}w_i(t-1) + \cdots + c_{i,r_i}w_i(t-r_i+1)] \end{aligned}$$

这里 $u_i(t)$ 代表主体 $i$ 在时刻 $t$ 时可以对自己施加的控制, 而 $\{w_i(t)\}$ 为主体 $i$ 的驱动噪声。每个主体的状态会受到其它主体的影响,  $\mathcal{N}_i$ 就表示主体 $i$ 的邻居, 主体 $i$ 可以观测到 $\mathcal{N}_i$ 中主体的状态, 同时 $\mathcal{N}_i$ 中的主体会对主体 $i$ 的动力学产生影响。类似上一章, 在此模型中我们仅考虑线性影响, 常数 $g_{ij}$ 就代表主体 $j$ 对主体 $i$ 的影响强度。在上面的模型中, 整数 $p_i \geq 0, q_i \geq 1, r_i \geq 0$  分别代表主体 $i$ 的动力学方程中几组参数的个数。

通过引入后移算子 $z$ 的多项式

$$\begin{aligned} A_i(z) &= 1 + a_{i1}z + a_{i2}z^2 + \cdots + a_{i,p_i}z^{p_i}, \\ B_i(z) &= b_{i1} + b_{i2}z + \cdots + b_{i,q_i}z^{q_i-1}, \\ C_i(z) &= 1 + c_{i1}z + c_{i2}z^2 + \cdots + c_{i,r_i}z^{r_i}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

主体 $i$ 的动力学模型可以改写为

$$A_i(z)x_i(t+1) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_{ij}x_j(t) + B_i(z)u_i(t) + C_i(z)w_i(t+1), \quad (12.3)$$

如果没有耦合项 $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} g_{ij}x_j(t)$ , 它就是熟知的ARMAX模型(或称CARMA模型)。ARMAX模型具有非常广泛的应用背景, 因此在传统的自适应控制理论中得到了深入的研究[21]。对于复杂系统的情形, 我们也从类似ARMAX的模型入手进行研究, 在前人成果基础上, 进行一些初步的研究。



### 12.2.2 问题

在本模型中,为研究方便,我们假设该动力学网络的拓扑结构保持不变,即集合 $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_N$ 不随时间而变化。整数 $p_i, q_i, r_i$ 为主体 $i$ 动力学方程中系统阶数的已经上界,而 $\{a_{ik}, 1 \leq k \leq p_i\}, \{b_{ik}, 1 \leq k \leq q_i\}, \{c_{ik}, 1 \leq k \leq r_i\}, \{g_{ij}, j \in \mathcal{N}_i\}$ 均为未知参数。

主体 $i$ 对自己施加控制的目的是:在任意时刻 $t$ ,基于自己的历史信息 $\{x_i(0), \dots, x_i(t), u_i(0), \dots, u_i(t-1)\}$ 以及它所观测到的邻居的状态 $\{x_j(t), j \in \mathcal{N}_i\}$ ,来构造出反馈控制量 $u_i(t)$ ,使得下述平均跟踪误差渐近达到极小:

$$J_i(t) \triangleq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |x_i(t) - x_i^*(t)|^2. \quad (12.4)$$

这里已知的确定性信号 $\{x_i^*(t)\}$ 是主体 $i$ 的局部跟踪目标。我们希望能给出设计局部控制律 $u_i(t)$ 的算法,并对算法的稳定性及最优性进行分析。

## 12.3 局部LS估计算法及控制律设计

对主体 $i$ 来说,其动力学方程可以改写为回归模型:

$$x_i(t+1) = \theta_i^T \phi_i^0(t) + w_i(t+1), \quad (12.5)$$

这里

$$\begin{aligned} \phi_i^0(t) &= [x_i(t), \dots, x_i(t-p_i+1), u_i(t), \dots, u_i(t-q_i+1), \\ &\quad w_i(t), \dots, w_i(t-r_i+1), \bar{X}_i^T(t)]^T, \\ \theta_i &= [-\vec{a}_i^T, \vec{b}_i^T, \vec{c}_i^T, \vec{g}_i^T]^T, \end{aligned} \quad (12.6)$$

其中

$$\begin{aligned} \vec{a}_i^T &= [a_{i1}, \dots, a_{i,p_i}], \\ \vec{b}_i^T &= [b_{i1}, \dots, b_{i,q_i}], \\ \vec{c}_i^T &= [c_{i1}, \dots, c_{i,r_i}], \\ \vec{g}_i^T &= [g_{i,n_{i1}}, g_{i,n_{i2}}, \dots, g_{i,n_{i,m_i}}], \\ \bar{X}_i^T(t) &= [x_{n_{i1}}(t), x_{n_{i1}}(t), \dots, x_{n_{i,m_i}}(t)]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

这里设集合

$$\mathcal{N}_i = \{n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{i,m_i}\}, \quad (12.8)$$

其中 $m_i$ 为主体 $i$ 邻居的个数。

对上面的回归模型, 可以用常用的最小二乘(LS)算法来估计 $\theta$ ; 但由于 $\phi_i^0(t)$ 包含不能观测的驱动噪声 $w_i(t)$ , 所以通常情况下我们不能得到 $\phi_i^0(t)$ , 故我们用其后验估计

$$\hat{w}_i(t+1) = x_i(t+1) - \hat{\theta}_i(t+1)\phi_i(t) \quad (12.9)$$

来代替, 相应地 $\phi_i(t)$ 定义为将 $\phi_i^0(t)$ 中的 $w_i(k)$ 替换为 $\hat{w}_i(k)$ 得到的向量。

这样, 结合最小二乘递推估计算法

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_i(t+1) &= \hat{\theta}_i(t) + a_i(t)P_i(t)\phi_i(t)[x_i(t+1) - \phi_i^T(t)\hat{\theta}_i(t)], \\ P_i(t+1) &= P_i(t) - a_i(t)P_i(t)\phi_i(t)\phi_i^T(t)P_i(t), \\ a_i(t) &= [1 + \phi_i^T(t)P_i(t)\phi_i(t)]^{-1} \end{aligned} \quad (12.10)$$

得到的向量 $\hat{\theta}_i(t)$ 就可以作为对未知参数向量 $\theta_i$ 在时刻 $t$ 的估计。该算法称为扩展的最小二乘(ELS)算法。(初始值可取 $P_i(0) = \alpha_0 I$ ,  $\frac{1}{\alpha_0} > \alpha_0 > 0$ ,  $\hat{\theta}_i(0)$ 可任取。)

对主体 $i$ , 用上述算法得到了 $\hat{\theta}_i(t)$ 后, 就可以通过必然等价原则来设计反馈控制律, 即取 $u_i(t)$ 使得

$$\hat{\theta}_i^T(t)\phi_i(t) = x_i^*(t+1), \quad (12.11)$$

从中解得

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \frac{1}{\hat{b}_{i1}(t)} \{x_i^*(t+1) + [\hat{a}_{i1}(t)x_i(t) + \cdots + \hat{a}_{i,p_i}(t)x_i(t-p_i+1)] \\ &\quad - [\hat{b}_{i2}(t)u_i(t-1) + \cdots + \hat{b}_{i,q_i}(t)u_i(t-q_i+1)] \\ &\quad - [\hat{c}_{i1}(t)\hat{w}_i(t) + \cdots + \hat{c}_{i,r_i}(t)\hat{w}_i(t-r_i+1)] \\ &\quad - \bar{g}_i^T \bar{X}_i(t)\}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

特别地, 当高频增益 $b_{i1}$ 已知时(即不需要再估计 $b_{i1}$ ), 这时记从 $\theta_i$ 中去掉 $b_{i1}$ 的参数向量为 $\bar{\theta}_i$ , 对应的从 $\phi_i(t)$ 中去掉 $u_i(t)$ 后的回归向量为 $\bar{\phi}_i(t)$ , 类似地引入其它记号 $\bar{a}_i(t)$ ,  $\bar{P}_i(t)$ , 则 $\bar{\theta}_i$ 的估计可由下述算法得到:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_i(t+1) &= \bar{\theta}_i(t) + \bar{a}_i(t)\bar{P}_i(t)\bar{\phi}_i(t)[x_i(t+1) - b_{i1}u_i(t) - \bar{\phi}_i^T(t)\bar{\theta}_i(t)], \\ \bar{P}_i(t+1) &= \bar{P}_i(t) - \bar{a}_i(t)\bar{P}_i(t)\bar{\phi}_i(t)\bar{\phi}_i^T(t)\bar{P}_i(t), \\ \bar{a}_i(t) &= [1 + \bar{\phi}_i^T(t)\bar{P}_i(t)\bar{\phi}_i(t)]^{-1} \end{aligned} \quad (12.13)$$

这时上述算法称为Åström-Wittenmark型自校正调节器。在本章中, 仅对该类型的局部估计算法进行讨论。为了简化记号, 在本章中对Åström-Wittenmark型LS估计算法, 我们仍用记号 $\theta_i$ ,  $\hat{\theta}_i(t)$ ,  $\phi_i(t)$ ,  $\phi_i^0(t)$ ,  $P_i(t)$ ,  $a_i(t)$ 来分别代表前面所述的 $\bar{\theta}_i$ ,  $\bar{\theta}_i(t)$ ,  $\bar{\phi}_i(t)$ ,  $\bar{\phi}_i^0(t)$ ,  $\bar{P}_i(t)$ ,  $\bar{a}_i(t)$ 。这样做并不会导致混淆, 后文中将对此不再说明。

## 12.4 主要结果

我们假设对每个主体 $i$ , 满足如下几个条件:

**A1**(噪声条件):  $\{w_i(t), \mathcal{F}_t\}$  为鞅差序列, 且对某常数  $\beta > 2$  满足

$$\sup_{t \geq 0} E[||w_i(t+1)||^\beta | \mathcal{F}_t] < \infty, a.s. \quad (12.14)$$

同时,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t w_i(k) w_i^\tau(k) = R_i > 0, a.s. \quad (12.15)$$

**A2**(最小相位条件):  $B_i(z) \neq 0, \forall z: |z| \leq 1$ .

**A3**(跟踪信号):  $\{x_i^*(t)\}$  是确定性有界信号。

**A4**(严正实条件):

$$|C_i(z) - 1| < 1, \forall z \in \mathcal{C}: |z| = 1.$$

**定理 12.1.** 在以上假设下, 整个闭环系统在如下意义下稳定并最优: 对  $i = 1, 2, \dots, N$  都有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t [||x_i(k+1)||^2 + ||u_i(k)||^2] < \infty, a.s. \quad (12.16)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t [x_i(k+1) - x_i^*(k+1)][x_i(k+1) - x_i^*(k+1)]^\tau = R_i, a.s. \quad (12.17)$$

## 12.5 定理证明

类似[21]中的工作, 证明思想仍然是设法用线性不等式来控制需估计的量。所不同的是, 这里由于每个主体采用的是局部估计算法和控制律, 但同时其动力学受到邻居内其它主体的影响, 这种耦合作用使得对任何一个孤立的主体 $i$ , 在没有估计出其邻居内主体状态的界时, 不可能单独对其状态 $x_i(t)$ 和控制 $u_i(t)$ 进行估计。这是这一问题的主要困难, 解决办法是分析每一个主体, 但从全局考虑各个主体间的关系, 通过对整体的一些估计得到对每个主体的估计。

在下面的证明中, 为方便起见, 首先引入下列记号:

$$\begin{aligned} \delta_i &\triangleq \text{tr}(P_i(t) - P_i(t-1)), \\ a_i(t) &\triangleq \frac{1}{1 + \phi_i^\tau(t) P_i(t) \phi_i(t)}, \\ \alpha_i(t) &\triangleq \frac{||\hat{\theta}_i^\tau(t) \phi_i(t)||^2}{1 + \phi_i^\tau(t) P_i(t) \phi_i(t)}, \\ r_i(t) &\triangleq 1 + \sum_{k=1}^t \phi_i^\tau(k) \phi_i(k). \end{aligned} \quad (12.18)$$

第1步:

$$\begin{aligned}
x_i(t+1) &= b_{i1}u_i(t) + \theta_i^\tau \phi_i(t) + \theta_i^\tau(\phi_i^0(t) - \phi_i(t)) + w_i(t+1) \\
&= x_i^*(t+1) - \hat{\theta}_i^\tau(t)\phi_i(t) + \theta_i^\tau \phi_i(t) + \theta_i^\tau(\phi_i^0(t) - \phi_i(t)) + w_i(t+1) \\
&= x_i^*(t+1) + \tilde{\theta}_i(t)\phi_i(t) + \theta_i^\tau(\phi_i^0(t) - \phi_i(t)) + w_i(t+1)
\end{aligned} \tag{12.19}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\theta}_i(t)\phi_i(t)\|^2 &= \alpha_i(t)[1 + \phi_i^\tau(t)P_i(t)\phi_i(t)] \\
&= \alpha_i(t)[1 + \phi_i^\tau(t)P_i(t+1)\phi_i(t)] + \alpha_i(t)\phi_i^\tau(t)[P_i(t) - P_i(t+1)]\phi_i(t) \\
&\leq \alpha_i(t)[2 + \delta_i(t)\|\phi_i(t)\|^2];
\end{aligned} \tag{12.20}$$

$$\|\phi_i^0(t) - \phi_i(t)\|^2 = O\left(\sum_{k=1}^t \|\hat{w}_i(t) - w_i(t)\|^2\right) = O(\log r_i(t)); \tag{12.21}$$

以及 $x_i^*(t+1)$ 有界和 $\|w_i(t)\|^2 = O(d_i(t))$ , 可得

$$\|x_i(t+1)\|^2 \leq 2\alpha_i(t)\delta_i(t)\|\phi_i(t)\|^2 + O(d_i(t)) + O(\log r_i(t)). \tag{12.22}$$

下面估计 $\|\phi_i(t)\|^2$ 。由最小相位条件, 存在 $\lambda_i \in (0, 1)$ , 使得

$$\|u_i(t)\|^2 = O\left(\sum_{k=0}^{t+1} \lambda_i^{t+1-k} (\|x_i(k)\|^2 + \|\bar{X}_i(k)\|^2 + \|w_i(k+1)\|^2)\right) \tag{12.23}$$

上式对 $i = 1, 2, \dots, N$ 都成立, 由于 $\bar{X}_i(k)$ 中包含的分量为 $\{x_j(k), j \in \mathcal{N}_i\}$ , 所以不能直接估计出 $\|u_i(t)\|^2$ 。

令

$$\begin{aligned}
\rho &= \max(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (0, 1), \\
X(k) &= [x_1(k), \dots, x_N(k)]^\tau, \\
\bar{d}(k) &= \max(d_1(k), \dots, d_N(k)).
\end{aligned} \tag{12.24}$$

显然有

$$\|x_i(k)\|^2 = O(\|X(k)\|^2), \|\bar{X}(k)\|^2 = O(\|X(k)\|^2), \tag{12.25}$$

故令

$$L_t \triangleq \sum_{k=0}^t \rho^{t-k} \|X(k)\|^2, \tag{12.26}$$

则对 $i = 1, 2, \dots, N$ , 有

$$\begin{aligned}
\|u_i(t)\|^2 &= O(L_{t+1}) + O\left(\sum_{k=0}^{t+1} \rho^{t+1-k} \bar{d}(k)\right) \\
&= O(L_{t+1}) + O(\bar{d}(t+1)).
\end{aligned} \tag{12.27}$$

由于

$$\begin{aligned} \phi_i(t) = & [x_i(t), \dots, x_i(t - p_i + 1), u_i(t - 1), \dots, u_i(t - q_i + 1), \\ & \hat{w}_i(t), \dots, \hat{w}_i(t - r_i + 1), \bar{X}_i^\tau(t)]^\tau, \end{aligned} \quad (12.28)$$

注意到

$$\hat{w}_i(k) = (\hat{w}_i(k) - w_i(k)) + w_i(k), \quad (12.29)$$

故有

$$\begin{aligned} & \|\phi_i(t)\|^2 \\ = & O(\|X(t)\|^2) + O(L_t) + O(\bar{d}(t)) + O(\log r_i(t) + d_i(t)) \\ = & O(L_t + \log \bar{r}(t) + \bar{d}(t)), \end{aligned} \quad (12.30)$$

其中

$$\bar{r}(t) \triangleq \max(r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t)). \quad (12.31)$$

于是由式(12.22), 对主体 $i$ , 存在常数 $C_i > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \|x_i(t+1)\|^2 \leq & C_i \alpha_i(t) \delta_i(t) L_t + O(\alpha_i(t) \delta_i(t) [\log \bar{r}(t) + \bar{d}(t)]) \\ & + O(d_i(t) + \log r_i(t)). \end{aligned} \quad (12.32)$$

注意到

$$\alpha_i(t) \delta_i(t) = O(\log r_i(t)), \quad (12.33)$$

可得

$$\|x_i(t+1)\|^2 \leq C_i \alpha_i(t) \delta_i(t) L_t + O(\log r_i(t) [\log \bar{r}(t) + \bar{d}(t)]). \quad (12.34)$$

**第2步:** 由于式(12.34)对 $i = 1, 2, \dots, N$ 成立, 从而

$$\begin{aligned} \|X(t+1)\|^2 &= \sum_{i=1}^N \|x_i(t+1)\|^2 \\ &\leq [\sum_{i=1}^N C_i \alpha_i(t) \delta_i(t)] L_t + O(N \bar{d}(t) \log \bar{r}(t)) + O(N \log^2 \bar{r}(t)). \end{aligned} \quad (12.35)$$

故由 $L_t$ 的定义知

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= \rho L_t + \|X(t+1)\|^2 \\ &\leq [\rho + C \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \delta_i(t)] L_t \\ &\quad + O(N \bar{d}(t) \log \bar{r}(t)) + O(N \log^2 \bar{r}(t)), \end{aligned} \quad (12.36)$$

其中

$$C = \max(C_1, C_2, \dots, C_N). \quad (12.37)$$

令  $\eta(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \delta_i(t)$ , 于是

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= O(N\bar{d}(t) \log r(t) + N \log^2 r(t)) \\ &\quad + O\left(N \sum_{k=0}^{t-1} \prod_{l=k+1}^t (\rho + C\eta(l)[\bar{d}(k) \log \bar{r}(k) + \log^2 \bar{r}(k)])\right). \end{aligned} \quad (12.38)$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_i(k) = \sum_{k=0}^{\infty} [\operatorname{tr} P_i(k) - \operatorname{tr} P_i(k+1)] \leq \operatorname{tr} P_i(0) < \infty, \quad (12.39)$$

从而  $k \rightarrow \infty$  时  $\delta_i(k) \rightarrow 0$ . 而

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i(k) = O(\log r_i(k)) = O(\log \bar{r}(k)). \quad (12.40)$$

故有对  $i = 1, 2, \dots, N$  和任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $k_0 > 0$ , 使得当  $t \geq t_0 \geq k_0$  时,

$$\rho^{-1} C \sum_{k=t_0}^t \alpha_i(k) \delta_i(k) \leq \frac{1}{N} \epsilon \log \bar{r}(t), \quad (12.41)$$

从而

$$\rho^{-1} C \sum_{k=t_0}^t \eta_i(k) \leq \epsilon \log \bar{r}(t). \quad (12.42)$$

应用不等式  $1 + x \leq e^x, \forall x \geq 0$  有

$$\prod_{k=t_0}^t [1 + \rho^{-1} C \eta_i(k)] \leq \exp\{\rho^{-1} C \sum_{k=t_0}^t \eta_i(k)\} \leq \exp\{\epsilon \log \bar{r}(t)\} = \bar{r}^\epsilon(t). \quad (12.43)$$

将上式代入(12.38), 即可得

$$L_{t+1} = O(\log r_i(t)[\log \bar{r}(t) + \bar{d}(t)]\bar{r}^\epsilon(t)). \quad (12.44)$$

再由  $\epsilon$  的任意性, 得

$$L_{t+1} = O(\bar{d}(t)\bar{r}^\epsilon(t)), \forall \epsilon > 0. \quad (12.45)$$

从而对  $i = 1, 2, \dots, N$ , 我们有

$$\begin{aligned} \|X(t+1)\|^2 &\leq L_{t+1} = O(\bar{d}(t)\bar{r}^\epsilon(t)), \\ \|u_i(t)\|^2 &= O(L_{t+1} + \bar{d}(t+1)) = O(\bar{d}(t)\bar{r}^\epsilon(t)), \\ \|\phi_i(t)\|^2 &= O(L_t + \log \bar{r}(t) + \bar{d}(t)) = O(\bar{d}(t)\bar{r}^\epsilon(t)). \end{aligned} \quad (12.46)$$

**第3步:** 根据关于噪声的假设A1, 类似引理11.6中的证明, 用鞅估计定理容易证明

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{r_i(t)}{t} \geq \text{tr}R_i > 0, \quad a.s. \quad (12.47)$$

从而  $t = O(r_i(t)) = O(\bar{r}(t))$ , 又因为  $\bar{d}(t) = O(t^\delta), \forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1)$ , 于是有  $\bar{d}(t) = O(\bar{r}^\epsilon(t))$ . 代入式(12.46), 并注意到  $\epsilon$  的任意性, 可得

$$\|\phi_i(t)\|^2 = O(\bar{r}^\delta(t)), \forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1). \quad (12.48)$$

从而

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^t \|\tilde{\theta}_i^\tau(k)\phi_i(k)\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^t \alpha_i(k)[1 + \phi_i^\tau(k)P_i(k)\phi_i(k)] \\ &= O(\log r_i(t)) + O\left(\sum_{k=0}^t \alpha_i(k)\|\phi_i(k)\|^2\right) \\ &= O(\log \bar{r}(t)) + O(\bar{r}^\delta(t) \sum_{k=0}^t \alpha_i(k)) \\ &= O(\bar{r}^\delta(t) \log \bar{r}(t)), \forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1). \end{aligned} \quad (12.49)$$

再由  $\delta$  的任意性, 得

$$\sum_{k=0}^t \|\tilde{\theta}_i^\tau(k)\phi_i(k)\|^2 = O(\bar{r}^\delta(t)), \forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1). \quad (12.50)$$

由

$$x_i(t+1) = \tilde{\theta}_i^\tau(t)\phi_i(t) + x_i^*(t+1) + w_i(t+1) + \theta_i^\tau(\phi_i^0(t) - \phi_i(t)), \quad (12.51)$$

知

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^t \|x_i(k+1)\|^2 &= O(\bar{r}^\delta(t)) + O(t) + O(\log \bar{r}(t)) = O(\bar{r}^\delta(t)) + O(t), \\ \sum_{k=0}^t \|u_i(k-1)\|^2 &= O(\bar{r}^\delta(t)) + O(t), \\ \sum_{k=0}^t \|\hat{w}_i(k)\|^2 &= O(\log \bar{r}(t)) + O(t). \end{aligned} \quad (12.52)$$

综上, 对  $i = 1, 2, \dots, N$  都有

$$r_i(t) = 1 + \sum_{k=0}^t \|\phi_i(k)\|^2 = O(\bar{r}^\delta(t)) + O(t), \forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1). \quad (12.53)$$

于是

$$\bar{r}(t) = \max\{r_i(t), 1 \leq i \leq N\} = O(\bar{r}^\delta(t)) + O(t), \forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1). \quad (12.54)$$

进而可得

$$\bar{r}(t) = O(t), \quad (12.55)$$

从而系统的稳定性得证。

**第4步：** 现在证最优性。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^t [x_i(k+1) - x_i^*(k+1)][x_i(k+1) - x_i^*(k+1)]^\tau \\ = & \sum_{k=0}^t w_i(k+1)w_i(k+1)^\tau + 2 \sum_{k=0}^t \eta_i(k)w_i(k+1) + \sum_{k=0}^t [\eta_i(k)]^2, \end{aligned} \quad (12.56)$$

其中

$$\eta_i(k) \triangleq \tilde{\theta}_i(k)\phi_i(k) + \theta_i^\tau(\phi_i^0(k) - \phi_i(k)). \quad (12.57)$$

由(12.50), (12.21)和鞅估计定理, 式(12.56)中后两项可估出其阶为 $O(\bar{r}^\delta(t))$ ,  $\forall \delta \in (\frac{2}{\beta}, 1)$ . 最后立即可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t [x_i(k+1) - x_i^*(k+1)][x_i(k+1) - x_i^*(k+1)]^\tau = R_i, \quad a.s. \quad (12.58)$$

进而

$$\sum_{k=0}^t \|x_i(k) - x_i^*(k) - w_i(k)\|^2 = O(\bar{r}^\epsilon(t)), \quad a.s. \quad \forall \epsilon > 0. \quad (12.59)$$

□

## 12.6 本章小结

本章研究了一个具有多种不确定性的离散时间多主体动力学模型(耦合ARMAX模型), 对每个主体设计了自校正调节器型局部控制器, 并证明了使得单个自校正调节器系统稳定与最优的那些条件也保证了整个系统的稳定性和最优性。

为节省篇幅, 本章不再讨论每个主体的高频增益 $b_{i1}$ 未知的情形, 虽然这种情形有更多的困难, 但本章证明的思想仍然可以应用。



## 结束语：总结与展望

反馈是自动控制领域的基本概念，其作用主要是减少系统中的各种不确定性对控制系统性能的影响。本文第一部分阐述了反馈机制能力与极限这一研究方向产生背景与其重要意义，并介绍了它们与含参迭代动力系统的联系。本文第二部分在已有工作的基础上，进一步研究了几类更广泛的系统，推广了部分已有的结果。在所有这些研究的激发下，本文第三部分提出了新的有限模型自适应控制问题，其特征是系统的内部不确定性可用本质上有限个模型来刻画，我们对此问题基于不同思想设计了反馈控制律并分别分析了各种算法的闭环稳定性。进一步为了探索复杂系统中反馈控制对付子系统间耦合等不确定性的能力，本文第四部分提出了一个研究复杂系统自适应控制的理论框架，并在此框架下对两类离散时间多主体动力学模型分别提出和研究了自适应同步问题和自适应控制问题，揭示了反馈控制在一定意义上能够实现主体局部目标与系统全局目标的辩证统一。

在本文中，“不确定性”与“反馈控制”这两个基本概念贯穿始终，涉及到控制系统中的多种不确定性——结构不确定性、参数不确定性、外部不确定性、本质上有限的模型不确定性、复杂系统中的耦合不确定性，相应的为对付这些不确定性，设计了针对系统特点的反馈控制律，并尽可能分析了闭环系统的稳定性；对于不确定性度量超出反馈机制能力的一些情形，则证明了表征反馈机制极限的一些不可能性定理。

归纳起来，本文主要有如下创新点：

1. 对一类用多个Lipschitz常数刻画的结构不确定系统，得到了几个新的不可能性定理，推广了已有的相关结果；发展了一套分析II型线性差分不等式的方法，进一步沟通了反馈机能能力极限与差分不等式、差分方程间的联系。
2. 对一类具有高斯白噪声干扰和用多个非线性指标表征的参数不确定系统，通过估计一类非范德蒙型行列式的阶，并应用本文发展的分析II型线性差分不等式的方法，得到了一个简洁的不可能性定理。
3. 提出并研究了同时有两种内部不确定性的一阶离散时间非线性模型，设计

了能同时对付结构不确定性和参数不确定性的自适应控制器，并对参数部分线性增长情形在一定条件下证明了闭环稳定性。

4. 提出了新的有限模型自适应控制问题，并针对它们发展了多种自适应算法，分别用不同方法证明了相应闭环系统的稳定性，说明了当系统的内部不确定性本质上有限时可构造有效的反馈控制使系统镇定。这些方法同时为切换系统、混杂系统的研究提供了新的视角。
5. 提出了新的关于复杂系统自适应控制问题的理论框架，在该框架下针对两种全局性质（同步性和稳定性）提出并研究了复杂系统自适应同步问题和复杂系统自校正调节器型自适应控制问题，说明了反馈控制可用于对付复杂系统中的耦合不确定性，在某种意义上实现个体局部目标和系统全局目标的统一。

本文中还留下许多有待进一步解决的问题，各章中有具体讨论，这里不妨总结一些主要的问题。第二部分中，留下的几个问题在数学上可能有相当的难度：对于第三章中的多Lipschitz常数刻画的不确定系统，反面结果和正面结果中若干条件的等价性在数学上还未完全证明；对于第四章中的高阶非线性高斯噪声模型，反面结果中主要条件的必要性理论上还需进一步讨论，有意义的正面结果还未能给出；对于第五章中的一阶半参数非线性模型，参数部分非线性增长情形( $b > 1$ )没有讨论，目前来看完全给出使系统稳定的 $b$ 和 $L$ 的定量关系非常困难。第三部分中对某些算法在无界噪声情形还没有很好的理论分析，可能需要发展新的分析方法；另外，对系统结构随时间而变化的情形进行理论分析也是非常有挑战性的问题，也会帮助我们更深入的理解混杂系统或切换系统。第四部分中给出了一个开放性的理论框架，在此框架下还可研究相当多的新问题；仅就本文研究过的问题来说，对系统内网络拓扑(邻居关系)可随时间或状态而变化的情形进行讨论无疑也非常有意义并具有相当的挑战性。

## 参考文献

- [1] Model free adaptive control. <http://www.cybosoft.com/newsevents/mfa.html>.
- [2] “model free” adaptive control. <http://www.manufacturing.net/ctl/article/CA187926.htm>
- [3] Special issue on new developments and applications in performance limitation of feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8), 2003.
- [4] Ravi P. Agarwal. *Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods, and Applications*. Marcel Dekker, 2nd edition, 2000.
- [5] Volker Ahlers and Arkady Pikovsky. Critical properties of the synchronization transition in space-time chaos. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 88(25), 2002.
- [6] R. Albert, H. Jeong, and A. L. Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406:378–382, 2000.
- [7] David Angeli and Edoardo Mosca. Adaptive switching supervisory control of nonlinear systems with no prior knowledge of noise bounded. *Automatica*, 40:449 – 457, 2004.
- [8] A. M. Annaswamy, A. P. Loh, and F. P. Skantze. Adaptive control of continuous time systems with convex/concave parametrization. *Automatica*, 34:33–49, 1998.
- [9] A.Packard and J.C.Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29:71–109, 1993.
- [10] K.J. Astrom and B. Wittenmark. On self-tuning regulators. *Automatica*, 9:185–199, 1973.

- [11] K.J. Aström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publ. Comp., 1989.
- [12] Yaneer Bar-Yam. *Dynamics of Complex Systems*. Westview Press, (July 2003).
- [13] M. Barahona and L. M. Pecora. Synchronization in small-world systems. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 89(5), 2002.
- [14] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1957.
- [15] Vladimír N. Belykh, Igor V. Belykh, and Martin Hasler. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. I. general approach. *Physica D*, 195(1-2):159–187, 2004.
- [16] H. S. Black. Stabilized feedback amplifiers. *Bell Syst. Tech. J.*, 13:1–18, 1934.
- [17] J. D. Boskovic. Adaptive control of a class of nonlinearly parametrized plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:930–934, 1998.
- [18] M. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 43:475–482, 1998.
- [19] Richard A. Brualdi. 组合数学 (*Introductory Combinatorics*). 计算机科学丛书. 机械工业出版社, 2005. 冯舜玺 罗平 裴伟东译 (原书第4版).
- [20] M. C. Campi and P. R. Kumar. Adaptive linear quadratic gaussian control: The cost-biased approach revisited. *SIAM J. Control and Optim.*, 36(6):1890–1907, 1998.
- [21] H. F. Chen and Lei Guo. *Identification and Stochastic Adaptive Control*. Birkhäuser, Boston, MA, 1991.

- [22] Jie Chen, Shinji Hara, and Gang Chen. Best tracking and regulation performance under control energy constraint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(8):1320–1336, 2003.
- [23] Lingji Chen and K. S. Narendra. Nonlinear adaptive control using neural networks and multiple models. *Automatica*, 37:1245–1255, 2001.
- [24] Yuan Shih Chow and Henry Teicher. *Probability theory :independence, interchangeability, martingales*. Springer-Verlag, 1978.
- [25] Paul Cull, Mary Flahive, and Robby Robso. *Difference Equations From Rabbits To Chaos*. Springer, 2005.
- [26] D. F. Delchamps. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 35:916–924, Aug. 1990.
- [27] Florin Diacu and Philip Holmes. 天遇—混沌与稳定性的起源. 上海科技教育出版社, 2001. 王兰宇译.
- [28] S. Dorogovtsev and J. Mendes. Evolution of networks. *Adv. Phys.*, 51(4):1079–1187, 2002.
- [29] J. C. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan, 1992.
- [30] J.C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26:4–16, Feb. 1981.
- [31] N. Elia and S. K. Mitter. Stabilization of linear system with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(7):1384–1400, 2001.
- [32] Alexander L. Fradkov, Iliya V. Miroshnik, and Vladimír O. Nikiforov. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems: Mathematics and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004.
- [33] G.F. Franklin, J.D. Powell, and A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 3rd edition, 1994.

- [34] K. Yasuda G. Zhai, B. Hu and A. N. Michel. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach. *Int. J. System Science*, 32(8):1055–1061, 2001.
- [35] Prashant M. Gade and Chin-Kun Hu. Synchronous chaos in coupled map lattices with small-world interactions. *PHYSICAL REVIEW E*, 62(5), 2000.
- [36] Murray Gell-Mann. *The Quark and the Jaguar, Adventures in the Simple and the Complex*. W. H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [37] G. Goodwin and K. Sin. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [38] Jifa Gu and Xijin Tang. Meta-synthesis approach to complex system modeling. *European Journal of Operational Research*, 166(3):597–614, 2005.
- [39] L. Guo and H. F. Chen. The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7):802–812, 1991.
- [40] Lei Guo. On adaptive stabilization of time-varying stochastic systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 28(6):1432–1451, 1990.
- [41] Lei Guo. *Time-varying stochastic systems*. Ji Lin Science and Technology Press, 1993. (in Chinese).
- [42] Lei Guo. On critical stability of discrete-time adaptive nonlinear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(11):1488–1499, 1997.
- [43] Lei Guo. Exploring the capability and limits of the feedback mechanism. In *Proceedings of ICM2002*, Beijing, 2002. (invited lecture).
- [44] Lei Guo. Exploring the maximum capability of adaptive feedback. *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, 16(5):341–354, 2002. (special issue).

- [45] Lei Guo. Understanding the role and capability of feedback. *Automation Panorama*, (1):1–3, 2003. (in Chinese).
- [46] Shi H., Wang L., and Chu T. Virtual leader approach to coordinated control of multiple mobile agents with asymmetric interactions. *Physica D*, 213(1):51–65, 2006.
- [47] J. Hespanha and A. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time, 1999.
- [48] A. Hurwitz. On the conditions under which an equation has only roots with negative real parts. *Mathematische Annalen*, 46:273–284, 1895.
- [49] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust adaptive control*. Prentice Hall, Englewood, Cliffs, NJ, 1996.
- [50] Sarika Jalan and R. E. Amritkar. Self-organized and driven phase synchronization in coupled maps. *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, 90(1):014101, 2003.
- [51] Holland J.H. *Hidden Order : How Adaptation Builds Complexity*. Addison-Wesley, New York, 1996.
- [52] Steven Johnson. *Emergence: The Connected Lives of Ants, Brains, Cities, and Software*. Scribner, reprint edition, August 2002.
- [53] Jürgen Jost. *Dynamical Systems*. 国外数学名著系列 (英文影印版). 科学出版社, 2006.
- [54] R. E. Kalman. Design of self-optimizing control systems. *Trans. ASME*, 80:468–478, 1958.
- [55] R.E. Kalman. Contributions to the theory of optima control. *Bol. Soc. Mat. Mexicana.*, 5:102–119, 1960.
- [56] K. Kaneko, editor. *Coupled Map Lattices*. World Scientific, Singapore, 1992.

- [57] I. Kanellakopoulos. A discrete-time adaptive nonlinear system. *IEEE Trans. Automat. Control*, 39, Nov. 1994.
- [58] J. L. Kelly. *General Topology*. D. Van Nostrand Co., 1955.
- [59] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1996.
- [60] Petar V. Kokotović. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems*, pages 7–17, June 1992. (1991 Bode Prize Lecture).
- [61] Vladimír Kucera. Control theory and forty years of IFAC: A personal view. <http://http://icat.snu.ac.kr/IFAC/newsletter40a/kucera.html>.
- [62] T.S. Kuhn. *The Structure of Scientific Revolutions*. Univ. of Chicago Press, Chicago, 1962.
- [63] V. Lakshmikantham and D. Trigiante. *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*. Academic Press, Inc., 1987.
- [64] I. D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [65] Yoan D Landau. *Adaptive control: The model reference approach*. Dekker, New York, 1979.
- [66] H. Levy and F. Lessman. *Finite difference equations*. Pitman, 1959.
- [67] F.L. Lewis. *Applied Optimal Control and Estimation*, Chapter 1: Introduction to Modern Control Theory. Prentice-Hall, 1992.
- [68] C. Y. Li and L. L. Xie. On robust stability of discrete-time adaptive nonlinear control. *Systems and Control Letters*, 2004. (submitted).
- [69] C. Y. Li, L. L. Xie, and Lei Guo. Robust stability of discrete-time adaptive nonlinear control. *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, July 2005.
- [70] Xiang Li and Guanrong Chen. Synchronization and desynchronization of complex dynamical networks: An engineering viewpoint. *IEEE Trans. on Circuits and Systems - I*, 50:1381–1390, Nov. 2003.



- [71] D. Liberzon and A. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems, 1999. <http://citeseer.csail.mit.edu/liberzon99basic.html>.
- [72] Lennart Ljung. *System Identification — Theory for the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 2nd edition, 1998.
- [73] J. Lü and G. Chen. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 50(6):841–846, 2005.
- [74] J. Lü, H. Leung, and G. Chen. Complex dynamical networks: Modelling, synchronization and control. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B*, 11a:70–77, 2004.
- [75] M. A. Lyapunov. Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 9:203–474, 1907. (Translation of the original paper published in 1892 in Comm. Soc. Math. Kharkow and reprinted as Vol. 17 in Ann. Math Studies, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1949.).
- [76] Waldrop M M. *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*. Touchstone Books, 1993.
- [77] Hongbin Ma and Lei Guo. An “impossibility” theorem on second-order discrete-time nonlinear control systems. In *Proceedings of the 24th Chinese Control Conference*, pages 57–61. South China University of Technology Press, July. 2005.
- [78] E. H. Mamdani. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plants. *Proceedings Institution of Electrical Engineers*, D-121.:1558 – 1588, 1974.
- [79] J. C. Maxwell. On governors. *Proc. Royal Soc. London*, 16:270–283, 1868.
- [80] Ronald E. Mickens. *Difference equations*. Van Nostrand Reinhold, 1987.
- [81] N. Minorsky. Directional stability and automatically steered bodies. *J. Am. Soc. Nav. Eng.*, 34:280, 1922.

- [82] E. Mosca and T. Agnoloni. Switching supervisory control based on controller falsification and closed-loop performance inference. *Journal of Process Control*, 12:457–466, 2002.
- [83] R. M. Murray, editor. *Control in an Information Rich World: Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics and Systems*. 2003. <http://www.cds.caltech.edu/murray/cdspanel>.
- [84] K. S. Narendra and J. Balakrishnan. A common lyapunov function for stable lti systems with commuting a-matrices. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39(12):2469–2471, 1994.
- [85] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev.*, 45:167–256, 2003.
- [86] Bak P., Tang C., and Weisenfeld K. Self-organized criticality. *Physical Review A*, 38:364–374, 1988.
- [87] P. Peleties and R. A. DeCarlo. Asymptotic stability of m-switched systems using lyapunov-like functions. *Proc. of the 1991 American Control Conference*, pages 1679–1684, 1991.
- [88] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyansky, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley, New York, 1962.
- [89] Bruno Portier and Abderrahim Oulid. Nonparametric estimation and adaptive control of functional autoregressive models. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(2):411–432, 2000.
- [90] E. Ravasz and A.-L. Barabási. Hierarchical organization in complex networks. *Phys. Rev. E*, 67:026112., 2003.
- [91] Charles R. Johnson. Roger A. Horn. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.

- [92] E. J. Routh. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion*. London: Macmillan Co., 1877.
- [93] Mu S., Chu T., and Wang L. Coordinated collective motion in a motile particle group with a leader. *Physica A*, 351(2-4):211–226, 2005.
- [94] Skogestad S. and Postlethwaite I. *Multivariable feedback control: Analysis and design*. John Willy & Sons, Inc., New York, 1996.
- [95] Eugene Seneta. *Non-Negative Matrices and Markov Chains*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, 1981.
- [96] Strogatz S.H. Exploring complex network. *Nature*, 410:268–276, 2001.
- [97] A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko, and E. Yu. Romanenko. *Difference equations and their applications*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [98] H. Shim, D. J. Noh, and J. H. Seo. Common lyapunov functions for exponentially stable non-linear systems. Florida, 1998.
- [99] F. P. Skantze, A. Kojic, A. P. Loh, and A. M. Annaswamy. Adaptive estimation of discrete-time systems with nonlinear parameterization. *Automatica*, 36:1879–1887, 2000.
- [100] W. Su, L. Qiu, and J. Chen. Fundamental performance limitations in tracking sinusoidal signals. pages 5335–5340, Denver, CO, 2003.
- [101] Herbert S. Wilf. *发生函数论 (Generating Functionology)*. 清华大学出版社, 2003. 王天明译.
- [102] Sekhar Tatikonda and Sanjoy Mitter. Control under communication constraints, 2000. PhD Dissertation, Massachusetts Institute of Technology.
- [103] M. Time, F. Wolf, and T. Geisl. Topological speed limits to network synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 92(7):074101, 2004.


- [104] O. Toker, J. Chen, and L. Qiu. Tracking performance limitations in LTI multivariable discrete-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 49(5):657–670, 2002.
- [105] H. S Tsien. *Engineering Cybernetics*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1954.
- [106] X. Wang and G. Chen. Synchronization in scale-free dynamical networks: Robustness and fragility. *IEEE Trans. Circ. Syst. -I*, 49:54–62, Jan. 2002.
- [107] X. F. Wang and G. R. Chen. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation Chaos*, 12:187, 2002.
- [108] Gérard Weisbuch. *Complex Systems Dynamics*. SFI Studies in the Sciences of Complexity. Addison Wesley Longman, 1991.
- [109] N. Wiener. *Cybernetics, or Control and Communication in the Animal and the Machine*. MIT Press, Cambridge, MA, 1st edition, 1948.
- [110] Rube B. Williams. Restricted complexity framework for nonlinear adaptive control in complex systems. *AIP Conference Proceedings*, 699,(1):623–630, February 2004.
- [111] W. S. Wong and R. W. Brockett. Systems with finite communication bandwidth constrains-ii: Stabilization with limited information feedback. *IEEE Trans. Automatic Control*, 44(5):1049–1053, 1999.
- [112] C. W. Wu and L. O. Chua. Synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Trans. Circ. Syst. -I*, 42(8):430–447, Aug. 1995.
- [113] L. L. Xie and Lei Guo. Fundamental limitations of discrete-time adaptive nonlinear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(9):1777–1782, 1999.
- [114] L. L. Xie and Lei Guo. Limitations and capabilities of feedback for controlling uncertain systems. In S. Chen, editor, *Control of Distributed Parameter and Stochastic Systems*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.

- [115] L. L. Xie and Lei Guo. Adaptive control of discrete-time nonlinear systems with structural uncertainties. In *Lectures on Systems, Control, and Information*. 2000. AMS/IP.
- [116] L. L. Xie and Lei Guo. How much uncertainty can be dealt with by feedback? *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(12):2203–2217, 2000.
- [117] F. Xue and L. Guo. Necessary and sufficient conditions for adaptive stabilizability of jump linear systems. *Communications in Information and Systems*, 1(2):205–224, Apr. 2001.
- [118] F. Xue and Lei Guo. On limitations of the sampled-data feedback for nonparametric dynamical systems. *J. Systems Science and Complexity*, 15(3):225–250, 2002.
- [119] F. Xue, M. Y. Huang, and Lei Guo. Towards understanding the capability of adaptation for time-varying systems. *Automatica*, 37:1551–1560, 2001.
- [120] M. Zhan, X. Wang, X. Gong, G. W. Wei, and C.-H. Lai. Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delay systems. *PHYSICAL REVIEW E*, 68(036208), 2003.
- [121] Y. X. Zhang and Lei Guo. A limit to the capability of feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):687–692, 2002.
- [122] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. A.S.M.E.*, 64:759–765, 1942. Available from <http://www.driedger.ca>.
- [123] 成思危. 复杂科学与组织管理. 科学杂志, (1), 2001.
- [124] 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜. 微分方程定性理论. 现代数学基础丛书. 科学出版社, 北京, 1997.
- [125] 冯巍. 切换控制系统的均方镇定控制和输入鲁棒性. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京, 2005. (PhD Dissertation).

- [126] 高普云. 非线性动力学:分叉、混沌与孤立子. 国防科技大学出版社, 2005.
- [127] 郭雷. 控制理论与技术、社会进步. 中国科学报, (第5版), 4月25日1997.
- [128] 韩京清. 控制理论—模型论还是控制论. 系统科学与数学, (8):328–336, 1989.
- [129] 郝柏林. 复杂性的刻画与“复杂性科学”. 科学杂志, 51(3):3–8, 1999.
- [130] 侯忠生. 非参数模型及其自适应控制理论. 科学出版社, 北京, 1999.
- [131] 刘峰. 有界干扰的线性切换系统的可镇定性. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京, 2004. (PhD Dissertation).
- [132] 刘劲杨. 复杂性是什么? 复杂性的词源学考量及其哲学追问. 科学技术与辩证法, (6), 2005.
- [133] 王联 王慕秋. 常差分方程. 新疆大学出版社, 乌鲁木齐, 1991.
- [134] 吴家睿. 生物系统的复杂性与简单性. 科学杂志, 2005.
- [135] 吴彤. 科学哲学视野中的客观复杂性. 系统辩证学学报, (4), 2001.
- [136] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法. 清华大学出版社, 2002.
- [137] 张利军. 两类复杂系统分析与控制的几个问题研究. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京, 2003. (PhD Dissertation).
- [138] 张伟年. 动力系统基础. 高等教育出版社, 乌鲁木齐, 2001.





## 读博士期间发表和完成文章目录

### 已发表文章

1. **Hongbin Ma** and Zhenzu Sun, Several inequalities and their generalizations in differential geometry, *Journal of Graduate School of Chinese Academy of Sciences*, pp.153-163,2004.
2. **Hongbin Ma**, What Kinds of Nonlinear Signals Can Be Tracked by LMS algorithm?, *Proceedings of the Chinese Control Conference*,pp.649-654,2002.
3. **Hongbin Ma**, Further Results on Limitations to the Capability of Feedback, *Proceedings of the Chinese Control Conference*,pp.66-70, Wuxi, 2004.
4. **Hongbin Ma** et al, Analysis for Gerard's biofilm model—A general approach for analysis of some complex systems, *Proceedings of the Complex Systems Summer School*, Qingdao, 2004.
5. James Minett, **Hongbin Ma** et al. Processes of Extinction. *Proceedings of the Complex Systems Summer School*, Qingdao, 2004.
6. **Hongbin Ma** and Lei Guo, An “Impossibility” Theorem on Second-order Discrete-time Nonlinear Control Systems, *Proceedings of the Chinese Control Conference*, pp.57-61, Guangzhou, 2005.
7. **Hongbin Ma**, Adaptive Synchronization of a Stochastic Discrete-time Dynamic Network Model, *Proceedings of the Chinese Conference on Complex Networks*, Wuhan, 2005.
8. **Hongbin Ma**, Finite-model adaptive control using LS- algorithm, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 已接收.(SCI)
9. **Hongbin Ma**, Further Results on Limitations to the Capability of Feedback, *International Journal of Control*, regular paper, 已接收.(SCI)



## 已完成文章

1. **Hongbin Ma**, Finite-model adaptive control using WLS-like algorithm, 已投. 
2. **Hongbin Ma**, Several algorithms for finite-model adaptive control problem, 已投. 
3. **Hongbin Ma**, Adaptive Synchronization of a Stochastic Discrete-time Multi-agent Dynamic Model, 待投 
4. **Hongbin Ma**, An “Impossibility” Theorem on a Class of High-order Discrete-time Nonlinear Control Systems, 待投. 
5. **Hongbin Ma**, Discrete-time Input-to-State Stability Extending to Unbounded Inputs, 待投.



## 致 谢

值此论文完成之际，谨在此向多年来给予我关心和帮助的老师、同学、朋友和家人表示衷心的感谢！

首先要特别感谢我的导师郭雷院士，他对我的一生已经有了深刻的影响，这种影响并将成为我一生的珍贵财富。在师从郭老师的五年中，我想最重要的不是郭老师曾教给我的一些知识，而是于细微处见精神，在潜移默化之中，使我感受到郭老师很多不同寻常之处，以及由此带来的心灵撞击。从他提问题的角度、深度、广度、洞察力，从他论著中娴熟而深刻的数学技巧，从他与我们曾进行过的各种讨论（数学、科学、哲学，匠人与大师的差别，人生成功的要素，学术境界与鉴赏力，做学问中的“自适应”， ），从他对学术、工作追求完美的态度，从他对我们的严格要求、谆谆教诲，不一而足，这很多方面都使我受益良多，在理念、境界、知行等诸多方面都得到提高。

此外，我感谢控制室的陈翰馥院士、张纪峰老师、程代展老师、谢亮亮老师、方海涛老师、秦化淑老师、陈文德老师等前辈师长，他们在讨论班上敏锐活跃的学术思想，坦诚热情的建议和帮助，让人难以忘怀；并且，他们在很多方面都给过我无私的帮助，我借此机会表示诚挚的谢意。另外还要感谢马志明院士、袁亚湘老师、唐贻发老师，通过参加他们的讨论班，不仅使我增长了知识，开阔了视野，还令我提高了多方面的能力；特别是在我找研究工作的过程中，马老师、袁老师、方老师还给了我很多无私的帮助，我唯一能做的就是：在今后以尽可能出色的工作，不辜负他们对我的厚望。我还要感谢郑州大学的曹策问教授、黄建华教授、熊胜利教授、孙振祖教授、施仁杰教授、林诒勋教授、慕小武教授和卜春霞教授，没有他们的传道、授业、解惑和帮助支持，不可能奠定我的学业基础，我也不可能有机会来到数学与系统科学研究院这样一流的研究机构学习。

感谢数学与系统科学研究院为我们提供了良好的学习和生活环境，使我们可以安心进行学术研究。感谢尤慧春老师、梁树英老师、王紫媛老师，人教处的邵欣、尹永华、王方玉、关华老师，控制室的刘智敏老师、常金玲老师等在学业和生活上的关心和帮助。还要感谢图书馆的诸位老师，我说不全他们的名字，但他们对我这个面孔的熟悉令我惊讶，我不会忘记他们为我们付出的辛勤劳动。

感谢数学院尤其是控制室的一些学长、同学曾给予我的各种帮助与支持，我在此只能列出其中部分人的名字：黄民懿博士、张艳霞博士、刘峰博士、孙轶民博士、武力强博士、夏元清博士、吕金虎博士、韩靖博士、任景莉博士、高立新博士、陶跃钢博士、康宇博士、贾超华博士、张立军博士、冯巍博士、孟斌博士、齐洪胜、胡小立、蔡淑萍、刘淑君、杨军、文再文、孙元昌、温海瑞、王培、张明波、刘志新、李婵颖、赵云波、赵延龙、包莹、叶鹏、杨俊美、胡鹏、齐波、穆义芬、唐共国、赵文琥、李韬、王剑魁、郭宇骞、谈树萍、孙志敏等。

另外，感谢贝尔实验室的黄大威老师给我提供了在贝尔实验室实习研究的机会，使我接触并了解了通讯领域的一些前沿研究，黄老师忘我的工作精神和严谨的科学态度都给我留下了深刻的印象。尽管这段时间非常短，但这段经历是令人难忘的，其间与迟彩霞、山丹、缪德山等人的相处也非常愉快，感谢他们的帮助与支持。

感谢我的父母，他们并不懂我做的工作，但他们长期的辛劳、对我无私的爱护和鼓励、为人的热忱与正直，永远是我前进的动力和学习的榜样。感谢我的兄长和嫂子，他们在遥远的家乡奉养双亲，使我在求学过程中专注于自己的学业。最后还要感谢我的爱人阚瑞，她跟我共同品尝了很多酸甜苦辣，为我付出了很多很多，但我却不能给她什么。特别是如果没有她的帮助，本文也不可能及时完成。我希望能通过自己的努力，挑起家庭的重担。

谨把本文献给我最敬爱的父亲！